نماذج خطية

$\Sigma \ \Delta \ \Phi$

$\notin \neq \supset \propto \supseteq \geq$

تأليف

الدكتور أنيس إسماعيل كنجو	الدكتور عبد الله بن عبد الكريم الشيحة



جامعة الملك سعود

إدارة النشر العلمي والمطابع

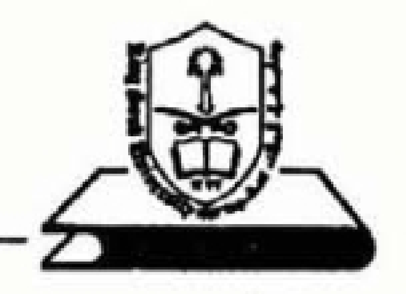

الله
بسم الله الرحمن الرحيم

نمــاذج خطيــة

تأليــف

الأستاذ الدكتور أنيس إسماعيل كنجو
أستاذ الإحصاء
قسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم – جامعة الملك سعود (سابقاً)

الدكتور عبد الله بن عبدالكريم الشيحة
أستاذ الإحصاء المشارك
قسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم – جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود
ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كنجـو، أنيس

نماذج خطية ، أنيس كنجو ؛ عبد الله الشيحة – الرياض ١٤٢٦هـ

٢٢٩ ص ١٧ × ٢٤سم

ردمك : ٥-٨٥٣-٣٧-٩٩٦٠

١- الرياضيات الإحصائية ٢- التحليل الإحصائي أ- الشيحة،

عبد الله (مؤلف مشارك) ب – العنوان

ديوي ٥١٩,٥٣٦ ١٤٢٦/٢٢٠٠

رقم الإيداع : ١٤٢٦/٢٢٠٠

ردمك : ٥-٨٥٣-٣٧-٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره بعد إطلاعه على تقارير المحكّمين في اجتماعه الثاني والعشرين الذي عُقد بتاريخ ١٤٢٥/٤/٢٨هـ الموافق ٢٠٠٤/٦/١٦م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٦هـ

المحتويات

الصفحة

الفصل الثاني: التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات وتوزيعات المعاينة اللامركزية

الفصل الثالث: توزيعات صيغة تربيعية

الفصل الرابع: نماذج إحصائية خطية

الفصل الخامس: التقدير واختبار الفرضيات

الفصل السادس: طرائق حسابية

الفصل السابع: نماذج التصميم

المقدمة

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده.... وبعد، فإننا نضع بين أيدي الطلاب والدارسين بالعربية كتاباً نحسب أنه المؤلف الأول في موضوعه يُنشر باللغة العربية، وهو تطوير لمذكرة أعطيت لطلاب السنة الأخيرة في قسم الإحصاء وبحوث العمليات في جامعة الملك سعود لأكثر من خمسة عشر عاماً. وهو يغطي محتويات مقرر في النماذج الخطّية، ويتضمن فقرات وبراهين منجّمة غير مطلوبة. ولابد من مراعاة جدول زمني للفصول المختلفة، وعلى وجه الخصوص تحديد الزمن المخصص للفصول الثلاثة الأولى التي تشكل تمهيداً لموضوع النماذج الخطية، وبحيث لا يستغرق الزمن المخصص لهذه الفصول أكثر مما ينبغي، وعلى حساب ما هو أهم من الفصول اللاحقة. ويتضمن الكتاب عدداً من الأمثلة والتمارين، نأمل أن تفي بالغرض ونرجو أن يتكرم علينا الزملاء والقرّاء بأية ملاحظات نستفيد منها في تقديم مادة الكتاب أو تثريه وتصوبه في الطبعات اللاحقة.

المكتبة العلمية العربية ضحلة، مع الأسف، في العديد من فروع العلوم المعاصرة، والطريق إلى المعرفة الميسّرة لطالبيها في هذه العلوم هو إثراء المكتبة العلمية العربية، وإمدادها بكل ما تمسّ إليه الحاجة، على الأقل، من المترجمات والمؤلفات. وكما يحتاج الإنسان العربي إلى الغذاء، ونتحدث عن الأمن الغذائي، فإن الطالب والدّارس العربي يحتاج في أيامنا هذه إلى المعرفة ميسّرة له بلغته الأم، وعلينا أن نفكر

ونعمل ونحتاط لما يمكن تسميته الأمن المعرفي. إذا كنا نريد أن نتطور وننمو ونتقدم فلنكتب ولنبحث ولننشر في ميادين العلوم المعاصرة كافّة بلغتنا العربية. نداء نضعه تحت نظر ولاة الأمر في البلدان العربية، وبين يدي الزملاء أساتذة الجامعات على مستوى الوطن الكبير. وهو نداء يشكل إغفاله ثغرة خطيرة في جدار الأمن القومي.

الحمد لله حمداً كثيراً طيباً مباركاً فيه أن أعاننا على إنجاز هذا الكتاب. ونسأله تعالى أن يتقبله منا عملاً صالحاً لوجهه الكريم، فهو من وراء القصد، وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المؤلفان

الفصل الأول

معلومات تمهيدية في المصفوفات

(١,١) بعض العمليات الأساسية في المصفوفات

تعــريف (١): مجموع مصفوفتين $A = (a_{ij})$، $B = (b_{ij})$ أبعاد كل منهما $m\times n$ هو مصفوفة $C = (c_{ij})$ أبعادها $m\times n$ حيث :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (١, ١)$$

تعريف (٢): حاصل ضرب مصفوفتين AB حيث $A = (a_{ij})$ أبعادها $m\times n$، و $B = (b_{ij})$ أبعادها $n\times p$ هو مصفوفة $C = (c_{ij})$ أبعادها $m\times p$ حيث :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \quad , \quad i = 1,\ldots,m \; ; \; j = 1,\ldots,p \qquad (١, ٢)$$

لاحظ أن عملية الضرب BA غير معرفة ما لم يكن $p = m$.

(٢ , ١) بعض خواص المحددات

(أ) لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ فعندئذ $|A'| = |A|$ حيث A' منقول A.

(ب) إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين في مصفوفة مربعة فمحدد المصفوفة يغير إشارته.

(ج) إذا انعدمت جميع عناصر سطر أو جميع عناصر عمود في مصفوفة مربعة ينعدم محددها.

(د) إذا ضربنا جميع عناصر سطر أو عمود بعدد سلّمي α يُضرب المحدد بالعدد السلمي α.

(هـ) $|BA|=|B|\,|A|=|AB|$ ، حيث A وB كلاهما مصفوفة مربعة من المرتبة نفسها $n\times n$.

(و) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ أو $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

(ز) لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n\times n$، إذا حذفنا السطر i والعمود j فسنحصل على مصفوفة، لنرمز لها بالرمز M_{ij}، أبعادها $(n-1)\times(n-1)$، ويسمى محددها $|M_{ij}|$ المحددة المصغّرة المقابلة للعنصر a_{ij}، ويسمى $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ولنرمز له بالرمز α_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij}، ويسمى منقول المصفوفة المربعة $n\times n$ المتضمنة لجميع العوامل المرافقة لعناصر A المصفوفة القرينة للمصفوفة A:

$$adj\ A=(\alpha_{ij})'=(\alpha_{ji}) \qquad (١,٣)$$

ح) مجموع جداءات عناصر أي سطر (أو عمود) بالعوامل المرافقة الموافقة لعنصر سطر (أو عمود) آخر يساوي الصفر، أي أن:

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,\alpha_{jt}=|A|\delta_{ij}\ ،\ (i,j=1,2,\dots,n) \qquad (١,٤)$$

حيث δ_{ij} هي دلتاكرونوكر وتساوي 1 إذا كان $i=j$ والصفر إذا كان $i\neq j$.

وبصورة مماثلة يمكن أن نكتب بالنسبة لعناصر عمود:

$$\sum_{t=1}^{n} a_{ti}\,\alpha_{tj}=|A|\delta_{ij}\ ،\ (i,j=1,2,\dots,n) \qquad (١,٥)$$

(١,٣) معكوس مصفوفة غير شاذة

لتكن المصفوفة المربعة A غير الشاذة، أي $|A|\neq 0$ ، ولنعتبر المصفوفة:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\alpha_{11}}{|A|} & \frac{\alpha_{21}}{|A|} & \dots & \frac{\alpha_{n1}}{|A|}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\alpha_{n1}}{|A|} & \frac{\alpha_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{\alpha_{nn}}{|A|}\end{bmatrix} \qquad (١,٦)$$

والعنصر في السطر i والعمود j هو $\frac{\alpha_{ji}}{|A|}$ حيث α_{ij} هو العامل المرافق للعنصر a_{ij} في عبارة المحدد $|A|$. ونجد من الخاصة (2) من خواص المحددات أن:

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I \tag{١, ٧}$$

حيث I المصفوفة المحايدة.

وفضلا عن ذلك، إذا كانت B مصفوفة مربعة بحيث إن $AB = I$، وضربنا الطرفين من اليسار بالمصفوفة A^{-1}، فسنجد $A^{-1} \,.\, AB = A^{-1}$ أو $I \,.B = B = A^{-1}$ وبصورة مماثلة إذا كان $BA = I$ فإن $B = A^{-1}$ أيضا، وتدعى المصفوفة A^{-1} معكوس (أو نظير أو مقلوب) المصفوفة غير الشاذّة A.

ويمكن تبيان أنه إذا كان $C = A_1\, A_2 \ldots\, A_s$ فإن $C^{-1} = A_s^{-1}\, A_{s-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$ أي أن معكوس جداء مصفوفات غير شاذة هو جداء المصفوفات الناتجة عن معكوس كل منها ولكن بترتيب معكوس. وإذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ فعندئذ تصحّ قوانين الرفع إلى قوة:

$$A^s \,.\, A^t = A^{s+t} \quad , \quad (A^s)^t = A^{st} \tag{١, ٨}$$

من أجل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة s، t، وإذا كانت A غير شاذة فتصحّ هذه العلاقات من أجل جميع القوى الصحيحة، موجبة أو سالبة أو صفر.

(١,٤) مفهوم الارتباط الخطي

نعني بمتجه X ذي n بعد، مجموعة مرتبة من n من الأعداد الحقيقية، ونكتب:

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ أو نكتبه تسهيلاً للطباعة بين قوسين مربعين $X = [x_1, \ldots, x_n\,]$.

ويمكن أن يكون المتجه X إما متجه عمود، وعندئذ سنكتبه في إحدى الصورتين المذكورتين آنفا، أو يكون متجه سطر وسنكتبه عندئذ على الشكل $X' = (x_1, \ldots x_2)$ أي

مدور أو منقول متجه العمود X. ومن المريح اعتبار متجه السطر كمصفوفة $1\times n$ تتضمن سطرا واحدا وn من الأعمدة، وعندئذ يكون متجه العمود مصفوفة $n\times 1$. وهكذا تنصاع المتجهات للقواعد المعروفة المطبقة على المصفوفات. ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن مصفوفة A أبعادها $m\times n$ على الشكل:

$$A = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

حيث يمثل X_i متجه عمود يتضمن عناصر العمود i من المصفوفة A.

لنعتبر الآن m من المتجهات ذات الـ n بعدا:

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}]$$
$$\vdots$$
$$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}]$$

فُيقال إن المتجهات مرتبطة خطيا إذا وُجدت m من الأعداد الحقيقية k_1، ...، k_m ليست جميعها أصفارا، بحيث إن:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_m x_m = 0 \qquad (١, ٩)$$

وحيث يرمز 0 في الجانب الأيمن لمتجه صفري ذي m بعدا. وإذا لم توجد مثل هذه الأعداد k، أي إذا تضمنت العلاقة (٩ , ١) كون $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ فنقول عندئذ إن المتجهات الـ m مستقلة خطيا.

وعلى سبيل المثال، إذا كان $X_1 = [1,-1, 2]$، $X_2 = [4,3,-5]$، و$X_3 = [1, 6, -11]$، فعندئذ $3X_1 - X_2 + X_3 = 0$، أي أن المتجهات الثلاثة مرتبطة خطيا. وعلى العكس، فإن المتجهات $V_1= [1, 0, 0]$، $V_2 = [0, 1, 0]$، $V_3 = [0, 0, 1]$ هي متجهات مستقلة خطيا؛ لأن $k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = [k_1, k_2, k_3]$، ويكون الناتج $[k_1, k_2, k_3]$ صفرا إذا، وفقط إذا، كان $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(٥ , ١) رتبة مصفوفة

نعرف رتبة مصفوفة A أبعادها $m\times n$ ولنرمز لها بالرمز $r(A)$ كما يلي:

$r(A)$ = أكبر عدد من متجهات السطور (الأعمدة) المستقلة في المصفوفة A.

= مرتبة أول محدد غير منعدم من A. (بمعنى أنه إذا احتوت A على الأقل محددة صغرى واحدة ذات r من السطور غير منعدمة، ولكنها لا تحوي أي محددة صغرى ذات $r + 1$ من السطور غير منعدمة فعندئذ تكون رتبة A مساوية لِ r). وإذا كانت $A = 0$ قلنا إن رتبة A تساوي الصفر.

ويمكن تبيان أن :

(أ) إذا كانت A مصفوفة $m\times n$ فلا تتجاوز رتبة A أصغر العددين (n, m).

(ب) رتبة جداء مصفوفتين AB لا يمكن أن تتجاوز أيا من الرتبتين $r(A)$ أو $r(B)$، أي أنها لا تتجاوز أصغر العددين $(r(A), r(B))$.

(ج) $r(A) = r(A')$، رتبة مصفوفة A تساوي رتبة منقولها.

(د) إذا كانت A مصفوفة $n\times n$ ذات رتبة تامة أي أن رتبتها تساوي n وكانت B مصفوفة $n\times m$ رتبتها k فعندئذ :

$$r(AB) = k = r(B)$$

لاحظ أنه إذا كان $QX = QY$ حيث Q مصفوفة $m\times n$، وكل من X، Y متجه عمود $n\times 1$، فعندئذ $Q(X-Y) = 0$ وهذا لا يتضمن، بصورة عامة، أن $X - Y = 0$ أي $X = Y$، ولكن إذا كانت Q مصفوفة مربعة $n\times n$ برتبة تامة، أي $r(Q) = n$، فعندئذ تكون العلاقة $Q(X - Y) = 0$ مكافئة للعلاقة $Q^{-1} Q(X-Y) = 0$ أي $X - Y = 0$ أو $X = Y$.

(٦ , ١) المصفوفات المجزأة

إذا كانت A مصفوفة $m\times n$ فعندئذ تشكل المصفوفتان A_1 وأبعادها $m\times n_1$ وA_2 وأبعادها $m\times n_2$، حيث $n_1 + n_2 = n$، تجزئة للمصفوفة A، ونكتب :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \overset{m\times n_1}{A_1} & \overset{m\times n_2}{A_2} \end{array}\right] \quad , \quad n_1 + n_2 = n$$

وبصورة مماثلة، يمكن كتابة مصفوفة B أبعادها $n\times s$ بصورة مجزأة كما يلي :

$$B = \begin{bmatrix} \overset{n_1 x s}{B_1} \\ \hline \overset{n_2 x s}{B_2} \end{bmatrix} \quad n_1 + n_2 = n$$

ويمكن كتابة A'، منقول A على الشكل:

$$A' = \begin{bmatrix} \overset{n_1 x m}{A_1'} \\ \hline \overset{n_2 x m}{A_2'} \end{bmatrix}$$

وبالطبع يمكن التجزيء إلى أكثر من مصفوفتين، ويمكن التحقق من أنه يمكن كتابة $E = AB$ على الشكل:

$$E = \left[A_1 | A_2\right] \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix} = [A_1B_1 + A_2B_2]$$

وبصورة مماثلة لو كانت:

$$C = \begin{bmatrix} \overset{m_1 x n}{C_1} \\ \hline \overset{m_2 x n}{C_2} \end{bmatrix}, \quad D = \left[\overset{n x r_1}{D_1} \middle| \overset{n x r_2}{D_2} \right]$$

حيث $m = m_1 + m_2$ و$r = r_1 + r_2$ فيمكن كتابة المصفوفة CD وأبعادها $m \times r$ على الشكل:

$$CD = \begin{bmatrix} C_1D_1 & C_1D_2 \\ C_2D_1 & C_2D_2 \end{bmatrix} \qquad (١, ١٠)$$

حيث C_1D_1 أبعادها $m_1 x r_1$ وهكذا.

(١, ٧) أثر مصفوفة

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ فإن مجموع العناصر القطرية $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ يسمى أثر المصفوفة A. ونرمز له عادة بالرمز $tr(A)$ وهكذا نكتب:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (١, ١١)$$

ومن السهل تبيان أن:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \qquad (١, ١٢)$$

وإذا كانت C مصفوفة $n\times m$ وD مصفوفة $m\times n$ فعندئذ:

$$tr(CD) = tr(DC) \tag{١, ١٣}$$

(١, ٨) نظام معادلات خطية

لنعتبر نظاما من m من المعادلات الخطية في n من المتغيرات x_1، ...، x_n:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{١, ١٤}$$

ويمكن كتابة المعادلات (١٤ ,١) برموز المصفوفات كما يلي:

$$AX = B \tag{١, ١٥}$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{١, ١٦}$$

وإذا وضعنا المتجه B كمتجه عمود أخير مضاف إلى المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات A عندئذ المصفوفة الموسّعة. ونواجه عند حل نظام المعادلات (١٥ ,١) الحالات التالية:

الحالة الأولى. لنفرض $n = m$ و$r(A) = n = r(A \mid B)$ فعندئذ يوجد حل وحيد.

الحالة الثانية. لنفرض $n = m$ و$r(A) = k < n$ فعندئذ إما:

(أ) النظام غير متسق إذا كان $r(A) < r(A \mid B)$ وليس له حل.

(ب) النظام متسق إذا كان $r(A) = r(A \mid B)$ وللنظام عدد لا نهائي من الحلول.

إذا كان المتجه B صفرياً أي إذا كان نظام المعادلات على الشكل:

$$AX = 0 \tag{١, ١٧}$$

فنقول إن لدينا نظاما من المعادلات الخطية المتجانسة ، (m معادلة في n من المجاهيل). لنفترض أن رتبة مصفوفة المعاملات A تساوي r فعندئذ يمكن تبيان ما يلي :

(أ) إذا كان $r = n$ فإن نظام المعادلات يمتلك فقط الحل التافه $(0, 0,...,0)$. وإذا كان $r < n$ فنستطيع دائما إيجاد $n - r$ من الحلول المستقلة خطيا بحيث يمكن التعبير عن كل حل للنظام كتركيب خطي في هذه الحلول. وبالتالي فإن نظاما كهذا يمتلك دائما حلا غير الحل التافه إذا كان $m < n$.

(ب) يكون لنظام n من المعادلات الخطية المتجانسة في n من المجاهيل حل آخر غير الحل التافه $(0, 0,...,0)$ إذا ، وفقط إذا ، كان محدد مصفوفة المعاملات منعدما.

(١,٩) الجذور المميزة

لتكن A مصفوفة مربعة وλ عدد سلّمي ، فتسمّى المعادلة $|A-I\lambda| = 0$ المعادلة المميزة للمصفوفة A وهي من أهم المعادلات في الجبر الحديث. وتسمى جذور هذه المعادلة كمعادلة في λ الجذور المميزة (أو الجذور الكامنة) للمصفوفة A.

(أ) لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$. ولنرمز بـ σ_m لمجموع قيم كافة المحددات المصغّرة الرئيسة التي تتضمن m سطرا (نقول إن محددة مصغرة هي محددة مصغرة رئيسة إذا كان ترتيب ما اخترناه لها من أسطر متفق تماما مع ترتيب ما اخترناه لها من أعمدة ، مثلا إذا كانت أبعاد المحددة المصغرة 3×3 وتضمنت السطر الأول والثالث والخامس من سطور المصفوفة A فإنها تكون محددة مصغرة رئيسة إذا كانت أعمدتها هي العمود الأول والثالث والخامس أي أنها مشكلة من عناصر A الواقعة في تقاطع الأسطر 1 ، 3 ، 5 مع الأعمدة 1 ، 3 ، 5). فيمكن تبيان أن الدالة المميزة للمصفوفة A هي :

$$f(\lambda) = |A-\lambda I| = (-\lambda)^n + \sigma_1(-\lambda)^{n-2} + \ldots + (-\lambda)\sigma_{n-1} + |A| \qquad (1, 18)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (-\lambda)^{n-m} \sigma_m$$

حيث $\sigma_0 = 1$ و $\sigma_n = |A|$.

مثال توضيحي. لتكن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

لدينا $\sigma_0 = 1$ ، $\sigma_1 = 2 + 2 - 1 = 3$.

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -24, \sigma_3 = |A| = 28$$

وبالتالي :

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28$$

(ب) إذا كان α_1 ، ... ، α_n الجذور المميزة للمصفوفة A فإن الجذور المميزة للمصفوفة $A\text{-}kI$ ، حيث k أي عدد حقيقي ، هي $\alpha_1\text{-}k$ ، $\alpha_2\text{-}k$ ، ... ، $\alpha_n\text{-}k$.

(ج) إذا كانت α_1 ، ... ، α_n الجذور المميزة للمصفوفة A فيمكن بسهولة تبيان أن :

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = |A| \quad ، \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = tr(A) \qquad (١, ١٩)$$

أي أن مجموعها هو أثر المصفوفة وحاصل ضربها هو محدد المصفوفة.

(د) (**نظرية ١**): لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ ، جذورها المميزة α_1 ، α_2 ، ... ، α_s مضاعفة v_1 ، v_2 ، ... ، v_s مرة ، على الترتيب. فالشرط اللازم والكافي لتكون A مشابهة لمصفوفـة قطرية هو أن تكون رتبة المصفوفة $A - \alpha_j I$ هي $n\text{-}v_j$ وذلك من أجل أي جذر α_j ، $j = 1,\ldots,s$.

(هـ) ليكن α جذرا مميزا لمصفوفة A فعندئذ يوجد متجه غير تافه X بحيث إن $AX = \alpha X$، ذلك لأنه يمكن كتابة هذه العلاقة الأخيرة على الشكل $(A - \alpha I)X = 0$ وهو نظام من المعادلات المتجانسة في مركبات X، وبما أن $|A - \alpha I| = 0$ بالفرض فهذا يضمن وجود حل غير تافه X. ويسمى مثل هذا الحل X، المتجه المميز (أو الكامن) للمصفوفة A المقابل للجذر المميز .

(١٠, ١) المصفوفات المتناظرة والمصفوفات المتعامدة

نقول إن مصفوفة A أبعادها $n \times n$ متناظرة إذا كانت مساوية لمنقولها $A = A'$ أو $a_{ij} = a_{ji}$ ، $(i, j = 1,2,\ldots, n)$. ونقول إن مصفوفة مربعة P متعامدة إذا كان معكوسها يساوي منقولها أي $P^{-1} = P'$. ونذكر فيما يلي بعضا من الخواص المهمة.

(أ) الجذور المميزة لمصفوفة متناظرة هي جميعها جذور حقيقية.

(ب) نقول إن متجهين $X = [x_1,\ldots,x_n]$ و $Y = [y_1,\ldots,y_n]$ متعامدان إذا كان جداؤهما الداخلي صفرا ، أي أن $\sum_{i=1}^{n} x_i \; y_i = 0$ أو بلغة المصفوفات $Y'X = X'Y = 0$. والمتجهان المميزان المقابلان لجذرين مميزين مختلفين لمصفوفة متناظرة هما متجهان متعامدان.

(ج) معكوس مصفوفة متعامدة هو بدوره مصفوفة متعامدة.

(د) تكون مصفوفة $P = (p_{ij})$ متعامدة بالنسبة لسطورها إذا ، وفقط إذا ، تحققت الشروط :

$$\sum_{t=1}^{n} p_{it} \; p_{jt} = \delta_{ij} \quad , \; (i, j = 1,\ldots, n) \qquad (١, ٢٠)$$

أي إذا ، وفقط إذا ، كان $PP' = I$.

(هـ) تكون مصفوفة $P = (p_{ij})$ متعامدة بالنسبة لأعمدتها إذا ، وفقط إذا ، تحققت الشروط :

$$\sum_{t=1}^{n} p_{ti} \; p_{tj} = \delta_{ij} \, , \; (i, j = 1,\ldots, n) \qquad (١, ٢١)$$

أي إذا ، وفقط إذا ، كان $P'P = I$.

(و) المصفوفة المتعامدة بالنسبة لسطورها متعامدة أيضا بالنسبة لأعمدتها والعكس بالعكس.

(ز) إذا كانت P مصفوفة متعامدة فإن $|P| = \pm 1$.

(ح) الجذور المميزة لمصفوفة متعامدة (عناصرها أعداد حقيقية) هي إما 1+ أو 1-.

(ط) لتكن A مصفوفة متناظرة $n\times n$ جذورها المميزة α_1 ، ... ، α_n فتوجد مصفوفة متعامدة P بحيث يكون $P'AP = diag\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

توضيح: لتكن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P'AP$ مصفوفة قطرية.

حل: $f(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$ ، جذورها 4 ، 2- ، 2-. وفي مقابل الجذر 4 نحصل على متجه مميز موافق بأخذ حل للنظام من المعادلات المتجانسة $|A - 4I|X = 0$. ورتبة مصفوفة المعاملات $A - 4I$ هي 2 وذلك وفقا للنظرية في (د) من الفقرة (٩ ,١).

لنأخذ المعادلتين الناتجتين من السطرين الأول والثاني من $A - 4I$ فنجد :

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad ، \quad -5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

لنأخذ $x_3 = 1$، مثلا ، فنجد بعد التعويض معادلتين مستقلتين في x_1 وx_2 هما ، $-5x_1 - 2x_2 = -1$ و$-2x_1 - 2x_2 = 2$ وبحلهما نجد متجها مميزا (أو متجها لا متغيرا) مقابلا للجذر المميز 4 وهو $(1, -2, 1)$. أما رتبة $A + 2I$ الموافقة للجذر المميز المضاعف 2- فهي 1. ونظام المعادلات المتجانسة $|A+2I|X = 0$ يكافئ معادلة واحدة. لنأخذ المعادلة الناتجة عن السطر الثالث فنجد $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ وبوضع $x_2 = x_3 = 1$ تصبح المعادلة $x_1 - 1 = 0$ وحلها $x_1 = 1$، وهكذا نصل إلى المتجه المميز (اللامتغير) الأول المقابل للجذر المميز المضاعف 2-. وبما أن للنظام في هذه الحالة حلين مستقلين خطيا ، وسنجد الحل الآخر بحيث يكون متعامدا مع الحل الأول$(1, 1, 1)$. ولهذا الغاية نضيف إلى المعادلة

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ المعادلة $(1,1,1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$ التي تعبر عن شرط التعامد، ثم نختار حلا للمعادلتين معا فنجد، مثلا، (1, 0, -1). والمتجهات الثلاثة الناتجة تشكل، بعد كتابتها بالشكل الناظمي، أعمدة المصفوفة المتعامدة P المطلوبة، وهكذا نكتب:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويمكن بسهولة التحقق من أن $P'AP = diag\ (4, -2, -2)$

(١١ ,١) الصيغ التربيعية

(أ) نقول إن Q صيغة تربيعية في n من المتغيرات x_1، ...، x_n إذا، وفقط إذا، كان:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = X'AX$$

وتسمى المصفوفة $A = (a_{ij})$ مصفوفة الصيغة التربيعية. وسنفترض أن A متناظرة. لتكن r رتبة A فنقول إن الصيغة التربيعية Q هي من الرتبة r. وإذا كان $r < n$ فنقول إن الصيغة التربيعية شاذة.

(ب) نقول عن مصفوفة A محددة موجبة إذا كانت الصيغة التربيعية $Q = X'AX$ موجبة من أجل أي $X \neq 0$. (ويُقال إن Q صيغة تربيعية محددة موجبة إذا كان $Q > 0$ لكل $X \neq 0$). ونقول إن مصفوفة A موجبة نصف محددة إذا كان $Q = X'AX \geq 0$ من أجل أي $X \neq 0$ (ويقال إن Q صيغة تربيعية محددة نصف موجبة إذا كان $Q \geq 0$ لكل $X \neq 0$).

لنأخذ كمثالين توضحيين:

$$Q_1 = X'\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$$

فهي موجبة محددة إذ يمكن كتابتها على الشكل:

$$Q_1 = 3\left[\left(x_1 - \frac{x_2}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}x_2^2\right]$$

ومن الواضح أنها أكبر من الصفر لأي $X = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. ونقول إن $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة موجبة محددة.

أما، $Q_2 = X'\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_1 = (x_1 - x_2)^2$ فهي موجبة نصف محددة لأنها أكبر أو تساوي الصفر لأي $X = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. ومن الواضح أن كل متجه (x_1, x_2) حيث $x_1 = x_2$ سيجعل $Q_2 = 0$، بينما لا يمكن أن تصبح Q_1 مساوية للصفر إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون $x_1 = x_2 = 0$.

ونقول إن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة موجبة نصف محددة.

(ج) الشرط اللازم والكافي لتكون مصفوفة متناظرة مربعة A موجبة محددة هو أن تكون جميع المحددات المصغرة الرئيسة فيها موجبة و$|A| > 0$.

(د) إذا كانت المصفوفة A أبعادها $m \times n$ من الرتبة m فإن المصفوفة المربعة AA' موجبة محددة. وإذا كانت من الرتبة n فإن المصفوفة المربعة $A'A$ تكون مصفوفة موجبة محددة.

(١٢, ١) بعض العلاقات المهمة في حالة مصفوفات مجزأة

لتكن المصفوفة المربعة Σ أبعادها $m{\times}m$ ولنجزئ المصفوفة كما يلي:

$$\Sigma = \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix}\overset{\begin{matrix} p & m-p \end{matrix}}{\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}}$$

لنعرّف المصفوفة:

$$B = \begin{array}{c} \\ p \\ m-p \end{array}\begin{bmatrix} \overset{p}{I} & \overset{m-p}{O} \\ A & I \end{bmatrix}$$

فعندئذ :

$$B\Sigma B' = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11}A' + \Sigma_{12} \\ A\Sigma_{11} + \Sigma_{21} & A\Sigma_{11}A' + \Sigma_{21}A' + A\Sigma_{21} + \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

لنفرض الآن أن Σ متناظرة ومحددة موجبة ، فعندئذ يكون :

$$|\Sigma_{11}| > 0, |\Sigma_{22}| > 0, \Sigma_{22} = \Sigma'_{22}, \Sigma_{11} = \Sigma'_{11}, \Sigma_{12} = \Sigma'_{21}$$

ولنعرّف A بحيث يكون $A\Sigma_{11} + \Sigma_{21} = 0$ أي $A = -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ فعندئذ يمكن كتابة :

$$B\Sigma B' = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن $|B| = 1$ ، وبالتالي :

$$|B\Sigma B'| = |B||\Sigma||B'| = |\Sigma| = |\Sigma_{11}||\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}|$$

ومنه نجد العلاقة المهمة التالية :

$$|\Sigma| = |\Sigma_{11}||\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}| \qquad (١, ٢٢)$$

ولو أننا أخذنا :

$$B = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}$$

لوجدنا بصورة مماثلة العلاقة :

$$|\Sigma| = |\Sigma_{22}||\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}| \qquad (١, ٢٣)$$

لنفرض الآن أن $V = \Sigma^{-1}$ ، أي أن :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

فسنجد المعادلات المصفوفية الأربع التالية :

$$\Sigma_{11}V_{11} + \Sigma_{12}V_{21} = I \quad , \quad \Sigma_{11}V_{12} + \Sigma_{12}V_{22} = 0$$
$$\Sigma_{21}V_{11} + \Sigma_{22}V_{21} = 0 \quad , \quad \Sigma_{21}V_{12} + \Sigma_{22}V_{22} = I$$

ومن هذه المعادلات نستنتج أن :

$$V_{11}^{-1}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \quad , \quad V_{22}^{-1}=\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12} \qquad (١, ٢٤)$$

وكذلك :

$$\Sigma_{11}^{-1}=V_{11}-V_{12}\,V_{22}^{-1}\,V_{21} \quad , \quad \Sigma_{22}^{-1}=V_{22}-V_{21}\,V_{11}^{-1}\,V_{12} \qquad (١, ٢٥)$$

ومن (١,٢٤) يمكن أن نكتب :

$$1=|V_{22}|\left|\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\right|$$

ومن (١,٢٢) و (١,٢٤) نجد :

$$|\Sigma|\,|V_{22}|=|\Sigma_{11}| \qquad (١, ٢٦)$$

وبصورة مماثلة نجد من (١,٢٣) و(١,٢٤) أن :

$$|\Sigma|\,|V_{11}|=|\Sigma_{22}| \qquad (١, ٢٧)$$

(١,١٣) اشتقاق المصفوفات

سنعني بالمؤثر $\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}$ المتجه العمود من المؤثرات $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1},...,\frac{\partial}{\partial \alpha_m}\right)'$ وهو متجه $m\times 1$.

ونعني بالجداء $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}\right)'$ المصفوفة $m\times m$ من المؤثرات :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2} \end{bmatrix}$$

وسنناقش هنا الحالتين :

(أ) $\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R)$ حيث R مصفوفة $m\times m$ من الثوابت و$\underline{\alpha}' = (\alpha_1,...,\alpha_m)$.

وفي هذه الحالة يكون :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R)=\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i r_{i1}, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i r_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i r_{im}\right)$$

وهكذا يكون :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\underline{\alpha}' R)=(r_{i1}, r_{i2},\ldots,r_{im})$$ (السطر i من R)

وبالتالي :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_m}\end{bmatrix}(\underline{\alpha}' R)= \left|\begin{matrix}\text{السطر الأول من } R\\ \text{السطر الثاني من } R\\ \vdots \\ \text{السطر } m \text{ من } R\end{matrix}\right| = R \qquad (١, ٢٨)$$

(ب) سنجد مشتق الصيغة التربيعية $\underline{\alpha}' R\underline{\alpha}$ في المتغيرات α حيث R و$\underline{\alpha}$ كما عرفناها في (أ)، لدينا هنا :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R\underline{\alpha})=\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{1j}\,\alpha_1\,\alpha_j+\ldots+\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j+\ldots+\sum_{j=1}^{m} r_{mj}\,\alpha_m\,\alpha_j\right)$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى α_i نجد :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\underline{\alpha}' R\underline{\alpha})=r_{1i}\,\alpha_1+\ldots+\left(2r_{ii}\,\alpha_i+\sum_{j\neq i}^{m} r_{ij}\,\alpha_j\right)+\ldots+r_{mi}\,\alpha_m$$

$$=\sum_{j\neq i}^{m} r_{ji}\,\alpha_j+2r_{ii}\,\alpha_i+\sum_{j\neq i}^{m} r_{ij}\,\alpha_j$$

$$=\sum_{j=i}^{m} r_{ji}\,\alpha_j+\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,\alpha_j=\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}+r_{ji})\alpha_j$$

وبأخذ $i = 1,\ldots,m$ نجد :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R\underline{\alpha}) = \left(\sum_{j=1}^{m} (r_{1j} + r_{j1})\alpha_j, ..., \sum_{j=1}^{m} (r_{mj} + r_{jm})\alpha_j \right)'$$

أو :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R\underline{\alpha}) = (R + R')\underline{\alpha}$$

وإذا كانت R متناظرة فعندئذ :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}}(\underline{\alpha}' R\underline{\alpha}) = 2R\underline{\alpha} \qquad (١, ٢٩)$$

(١, ١٤) تحويل المتغيرات

ليكن $\underline{x} = C\underline{y}$ تحويل 1:1 من مجموعة المتغيرات $\underline{x}'=(x_1,...,x_m)$ إلى المجموعة $\underline{y}' = (y_1,...,y_m)$، حيث C مصفوفة التحويل و$|C| \neq 0$. والمحدد التفاضلي للتحويل (أو يعقوبي التحويل) هو :

$$|J| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \frac{\partial x_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m} \end{Vmatrix} = \left\Vert \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\Vert$$

حيث $(J)_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$. ولكن لدينا :

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, y_j \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

وبالاشتقاق نجد :

(١, ٣٠) $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = (J)_{ij} = c_{ij}$ ، $(i, j = 1,\ldots,m)$. أي أن $J = C$ و $|J| = |C|$.

لنفرض الآن أننا نحول من $\underline{y}$ إلى $\underline{x}$ ومصفوفة التحويل هي C^{-1}، أي $\underline{y} = C^{-1}\underline{x}$، فنجد وفقا للقاعدة في (١, ٣٠) أن المحدد التفاضلي لهذا التحويل هو $|C^{-1}| = \frac{1}{|C|}$. أي أن المحدد التفاضلي للتحويل $\underline{x} \to \underline{y}$ هو مقلوب المحدد التفاضلي للتحويل $\underline{y} \to \underline{x}$.

(١, ١٥) المصفوفات متساوية القوى

نقول إن مصفوفة مربعة A متساوية القوى إذا كان:

$$A\,.\,A = A^2 = A \qquad (١, ٣١)$$

(أ) تتصف هذه المصفوفات بأن جذورها المميزة هي إما 0 أو 1. ولرؤية ذلك، ليكن α جذرا مميزا لمصفوفة متساوية القوى A، و$\underline{x}$ المتجه المميز المقابل لهذا الجذر فعندئذ.

$$\alpha\,\underline{x} = A\,\underline{x} = A\,A\,\underline{x} = A\,(\alpha\underline{x}) = \alpha A\,\underline{x} = \alpha^2\,\underline{x}$$

أي أن $(\alpha - \alpha^2)\,\underline{x} = 0$ أو $\alpha - \alpha^2 = 0$ وبالتالي α تساوي 0 أو 1.

وليس العكس صحيحا بالضرورة، فالمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ لها جذران مميزان كل منهما صفر مع أن $A\,.\,A \neq A$. وسيكون العكس صحيحا إذا كانت A متساوية القوى ومتناظرة. وسنبين ذلك في التمهيد التالي.

نظرية (٢): لتكن A مصفوفة متناظرة فالشرط اللازم والكافي كي تكون A متساوية القوى هو أن تكون جذورها المميزة إما صفر أو الواحد.

برهان:

١- لزوم الشرط. تمّ برهانه أعلاه.

٢- كفاية الشرط. لنفترض أن جذور A هي إما 0 أو 1 فتوجد مصفوفة متعامدة P بحيث يكون:

$$P'AP = \Lambda = diag\,(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

ويمكننا الآن كتابة :

$$A . A = (P \Lambda P') (P \Lambda P') = P \Lambda \Lambda P' = P \Lambda P' = A$$

وهو المطلوب.

(ب) من (١٩ ,١) ومن حقيقة أن رتبة أي مصفوفة مربعة تساوي عدد جذورها المميزة غير المساوية للصفر نجد أنه من أجل أي مصفوفة A متساوية القوى أبعادها $m \times m$ لدينا :

$$A \text{ رتبة } = r(A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = tr(A) \qquad (١, ٣٢)$$

(ج) نلاحظ أن المصفوفة الوحيدة غير الشاذة ومتساوية القوى $m \times m$ هي المصفوفة المحايدة (الواحدية) I_m. ذلك لأنه إذا كانت A غير شاذة ومتساوية القوى $m \times m$ فإن $A^{-1} A A = A^{-1} A$ أو $I_m A = I_m$ أو $A = I_m$.

(د) ومن المفيد ملاحظة أنه إذا كانت A مصفوفة $m \times m$ متساوية القوى فإن المصفوفة $I_m - A$ هي بدورها مصفوفة متساوية القوى، ذلك لأن :

$$(I - A) (I - A) = I - A - A + A A = I - A \qquad (١, ٣٣)$$

نظرية (٣): إذا كانت A مصفوفة $m \times m$ متناظرة موجبة محددة فيمكن إيجاد مصفوفة مثلثة T وحيدة بحيث يكون $T' A T = I_m$.

برهان*: لتكن المصفوفة المربعة $Q = \underline{u}' A \underline{u}$ حيث $\underline{u}' = (u_1,...,u_m)$ فلدينا :

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_i u_j =$$

$$\begin{aligned} & a_{11} u_1^2 + 2a_{12} u_1 u_2 + \quad \dots \quad + 2a_{1m} u_1 u_m \\ & \quad + a_{22} u_2^2 + 2a_{23} u_2 u_3 + \quad \dots \quad + 2a_{2m} u_2 u_m \\ & \quad\quad + a_{33} u_3^2 + \quad \dots \quad + 2a_{3m} u_3 u_m \\ & \quad\quad\quad \vdots \\ & \quad\quad\quad + a_{mm} u_m^2 \end{aligned}$$

ويمكن التعبير عن السطر الأول بالطريقة التالية ، إذ يمكن أولاً كتابة :

$$\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}u_1+\sum_{j=2}^{m}a_{1j}u_j\right)^2=\frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}^2u_1^2+2a_{11}u_1\left(\sum_{j=2}^{m}a_{1j}u_j\right)+\left(\sum_{j=2}^{m}a_{1j}u_j\right)^2\right]$$

وبالتالي يمكن كتابة السطر الأول وهو الطرف الأيسر من العلاقة التالية كما يلي :

$$\frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}u_1^2+2a_{11}u_1\sum_{j=2}^{m}a_{1j}u_j\right]=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}u_1+a_{12}u_2+\ldots+a_{1m}u_m)^2-\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}u_i u_j$$

وتصبح Q على الشكل :

$$Q=\left(\sqrt{a_{11}}\,u_1+\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}u_2+\ldots+\frac{a_{1m}}{\sqrt{a_{11}}}u_m\right)^2+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}u_i u_j\left(a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}\right)$$

لنرمز الآن بالرمز b_{ij} للكمية $a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$ وللكمية بين قوسين بالرمز w_1 فعندئذ يكون :

$$Q=w_1^2+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}u_i u_j b_{ij}=w_1^2+Q_1$$

وبإعادة العملية نفسها على الصيغة Q_1 نجد :

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}b_{ij}u_i u_j=\left(\sqrt{b_{22}}\,u_2+\frac{b_{23}}{\sqrt{b_{22}}}u_2+\ldots+\frac{b_{2m}}{\sqrt{b_{22}}}u_m\right)^2$$

$$+\sum_{i=3}^{m}\sum_{j=3}^{m}u_i u_j\left(b_{ij}-\frac{b_{2i}b_{2j}}{b_{22}}\right)$$

ويأخذ $c_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{2i}b_{2j}}{b_{22}}$ و w_2 تساوي الكمية بين قوسين نكتب :

$$Q=w_1^2+w_2^2+\sum_{i=3}^{m}\sum_{j=3}^{m}c_{ij}u_i u_j$$

وبإعادة العملية نفسها حتى الحد الأخير نجد :

$$Q=w_1^2+w_2^2+\ldots+w_m^2=w'w$$

ولدينا الآن :

$$\begin{aligned} w_1 &= f_{11}\,u_1 + f_{12}\,u_2 + \ldots + f_{1m}\,u_m \\ w_2 &= \qquad\quad f_{22}\,u_2 + \ldots + f_{2m}\,u_m \\ w_3 &= \qquad\qquad\quad f_{33}\,u_3 + \ldots + f_{3m}\,u_m \\ &\vdots \\ w_m &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f_{mm}\,u_m \end{aligned}$$

والعناصر f_{ij} معرفة عبر الطريقة التي ولدنا فيها المقادير w_i. وعلى سبيل المثال $f_{11}=\sqrt{a_{11}}$ ، $f_{12}=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$ الخ. وفي السطر الثاني $f_{22}=\sqrt{b_{22}}$ ، $f_{23}=\frac{b_{23}}{\sqrt{b_{22}}}$ إلخ. وفي السطر الثالث $f_{33}=\sqrt{c_{33}}$ ، $f_{34}=\frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}}}$ ، إلخ. أي أن :

$$\underline{w} = F\,\underline{u}$$

حيث :

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & & f_{mm} \end{pmatrix}$$

والآن $\underline{u} = F^{-1}\,\underline{w}$ ، لنعرّف T بحيث يكون $T = F^{-1}$ فعندئذ $\underline{u} = T\,\underline{w}$ حيث T مصفوفة مثلثة عليا. ولكن الصيغة التربيعية $Q = \underline{u}'\,A\,\underline{u} = \underline{w}'\,T'A\,T\,\underline{w}$ من جهة، وهي تساوي على الوجه الآخر $\underline{w}'\,\underline{w}$ ، ومن المطابقة :

$$\underline{w}'\,T'A\,T\,\underline{w} \equiv \underline{w}'\,\underline{w}$$

نجد النتيجة المطلوبة $T'\,A\,T = I$.

نظرية (٤): لتكن A_1 ، ... ، A_t جملة من المصفوفات المتناظرة $n{\times}n$ فالشرط اللازم والكافي كي يوجد تحويل متعامد C بحيث تكون المصفوفات المحوّلة $C'A_1C$ ، ... ، $C'A_tC$ ، جميعها قطرية هو أن يكون A_iA_j متناظرا لكل i و j وبما أن جميع المصفوفات A_t متناظرة فسيكون A_iA_j متناظرا ، إذا وفقط ، إذا كان A_i ، A_j قابلين للتبادل أي $A_iA_j = A_jA_i$.

(١, ١٦) الفضاءات والإسقاطات*

نعلم أن $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)'$ و $\underline{y} = (y_1,\dots,y_n)'$ حيث x_j و y_j أعداد حقيقية ، $j = 1,2,\dots,$ ، تمثل متجهات (أعمدة) في R^n. ويصبح R^n فضاء إقليديا عندما نحدد معنى لمفهوم «الطول» و«الزاوية». ونعرف طول متجه $\underline{x}$ أو $|\underline{x}|$ بأنه :

$$|\underline{x}| = (\underline{x}'x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1, 34)$$

وبما أن الجداء الداخلي في R^2 هو $\underline{x}'\,\underline{y} = |\underline{x}|\,|\underline{y}|\cos\theta$ فيمكن تعميم الفكرة إلى R^n فنعرف الزاوية θ بين متجهين $\underline{x}$ و $\underline{y}$ بأنها :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\underline{x}'\,\underline{y}}{|\underline{x}|\,|\underline{y}|} \qquad (1, 35)$$

ونذكر أن $\underline{x}$ و $\underline{y}$ متعامدين إذا كان $\cos\theta = 0$ ، أي إذا كان $\underline{x}'\,\underline{y} = 0$. والآن فإن أي k من المتجهات المستقلة x_1 ، ... ، x_k في R_n ، حيث $k \le n$ تولّد فضاء جزئيا ذا k من الأبعاد S_k حيث $S_k \subset R^n$. لنعتبر الآن مصفوفة مربعة A أبعادها $n\times n$ فلدينا المصطلحات التالية :

(أ) نقول إن M الفضاء العمود أو الفضاء الصورة للمصفوفة A ، $\mathrm{M} \subset R^n$ ، إذا كان أي متجه $\underline{z}$ ينتمي إلى M معطى بالعلاقة $\underline{z} = A\,\underline{x}$ ، حيث $\underline{x}$ متجه في R^n. (نلاحظ أن $\underline{z}$ تركيب خطي في أعمدة A أي أن $\underline{z} = x_1\,a_{.1} + \dots + x_n\,a_{.n}$ حيث $a_{.i}$ متجه العمود i من A) وبصورة رمزية نكتب :

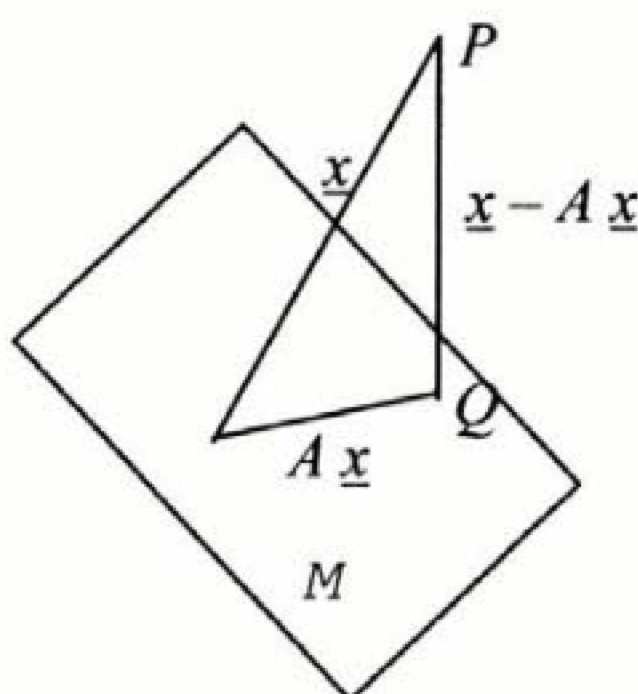
$$\mathrm{M} = \{\underline{z} \mid \underline{z} = A\,\underline{x},\ \underline{x} \in R^n\} \qquad (1, 36)$$

(ب) نقول إن المتجه $\underline{x}$ قد حُوّل إلى المتجه $\underline{z}$ وفق المصفوفة A إذا كان $\underline{z} = A\,\underline{x}$.

[نتحدث أحيانا أنه يتم مسح نقطة P في R^n إحداثياتها $\underline{x}' = (x_1,\dots,x_n)$ إلى نقطة Q إحداثياتها $\underline{z}' = (z_1,\dots,z_n)$ حيث $\underline{z} = A\,\underline{x}$] ونشير أحيانا إلى مسح $\underline{x}$ إلى $\underline{z}$ بأنه مسقط $\underline{x}$ على $\underline{z}$.

(ج) لنعتبر المصفوفة A والفضاء الصورة M. نقول إن A تُسقط R^n إسقاطا متعامدا على M، إذا كان $\underline{x} - A\,\underline{x}$ متعامدا مع أي متجه في M، وذلك أيا كان $\underline{x}$، ونقول عندئذ إن A تعرّف إسقاطا متعامدا.

ونمثل في الشكل رقم (١ , ١) تمثيلا هندسيا لإسقاط متعامد. وتمسح المصفوفة A النقطة P من R^n التي إحداثياتها $\underline{x}'$ إلى النقطة Q من M، وإحداثياتها $\underline{z}' = (A\,\underline{x})'$، وبصورة يكون معها ما يُسمى بالمتجه الراسب من P إلى Q، أي $\underline{x} - \underline{z} = \underline{x} - A\underline{x} = (I - A)\underline{x}$ متعامد مع كل متجه في M، وبصورة خاصة، متعامد مع المتجه $\underline{z} = A\,\underline{x}$. ونقول عندئذ إن A تعرف إسقاطا متعامدا.



الشكل رقم (١ , ١) تفسير هندسي لمسقط النقطة P إسقاطا متعامدا على M.

(١٧ , ١) المصفوفات متساوية القوى والإسقاطات المتعامدة*

الحقيقة المهمة حول الإسقاطات المتعامدة هي صلتها الحميمة بالمصفوفات متساوية القوى كما تفصح عنها النظرية التالية:

نظـــرية (٥): تعرف المصفوفة A إسقاطا متعامدا إذا، وفقط إذا، كانت متناظرة ومتساوية القوى.

برهان:

(أ) لزوم الشرط. لنفترض أن A تسقط R^n إسقاطا متعامدا على M، وعلى وجه الخصوص، متعامدا مع المتجه $A\underline{y}$، حيث $\underline{y}$ أي متجه ينتمي إلى R^n، أي أن:

$$(A\ \underline{y})'\ (x - A\ \underline{x}) = 0$$

أو:

لأي $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{y}'\ A'\ \underline{x} = \underline{y}'\ \underline{A}'\ A\ \underline{x}$

فعندئذ يكون:

$A' = A'\ A$ أو $A = A'\ A$ وبالتالي $A = A' = A'\ A$، أي أن A متناظرة ومتساوية القوى.

ب) كفاية الشرط. نفترض هنا أن $A = A'$ و $A = A\ A$، وبالتالي $A' = A'\ A$ مما يسمح لنا بكتابة.

لكل $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ $\quad \underline{y}'\ A'\ \underline{x} = \underline{y}'\ \underline{A}'\ A\ \underline{x}$

وبالتالي:

$$(A\ \underline{y})'\ (\underline{x} - A\ \underline{x}) = 0$$

أي أن $A\ \underline{y}$ متعامد مع $\underline{x} - A\ \underline{x}$، وتعرف A إسقاطا متعامدا.

(١٨ , ١) تمارين

١ - لتكن المصفوفتان A، B حيث:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب التحقق مما يلي:

$$(A - B)^2 = 0 \quad ، \quad A^2 = B^2 = \left[\frac{1}{2}(A + B)\right]^2 = I$$

٢ - لتكن A المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}8 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد $Adj\ A$، ثم أوجد A^{-1}.

٣ - بيّن أن محدد أي مصفوفة من الشكل :

$$\begin{matrix} & p & m-p \\ p & \multirow{2}{*}{} & \end{matrix}\quad \begin{matrix} \\ {}^{p} \\ {}_{m-p}\end{matrix}\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ O & A_{22}\end{pmatrix}$$

يساوي $|A_{11}|\,|A_{22}|$

٤ - بيّن أن :

$$tr(CD)=tr(DC) \quad ، \quad tr(A\pm B)=tr(A)\pm tr(B)$$

٥ - برهن العلاقة (١٩ , ١).

٦ - بيّن أنه إذا كانت A مصفوفة $m\times m$ متناظرة فإن مجموع مربعات عناصر A يساوي مجموع مربعات جذورها المميزة.

٧ - برهن (١٠ , ١ب).

٨ - لكل من المصفوفتين المتناظرتين التاليتين أوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث يكون $P'AP$ مصفوفة قطرية.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -6 & -4\\ -6 & 4 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad ، \quad A=\begin{bmatrix}-9 & 2 & 6\\ 2 & -9 & 6\\ 6 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

٩ - أثبت العلاقتين (١,٢٤) و (١, ٢٥).

١٠ - بيّن أن الصيغة التربيعية $\underline{y}'A\,\underline{y}$ حيث ،

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

تساوي $\sum_{i=1}^{3}(y_i-\bar{y})^2$.

١١ - تحقق بصورة عامة من العلاقة :

$$\underline{y}'\,A\,\underline{y}=\underline{y}'\,(I_n-\frac{1}{n}J_n^n)\,\underline{y}=\sum_1^n(y_i-y)^2$$

حيث J_n^n مصفوفة مربعة $n\times n$ جميع عناصرها تساوي 1.

١٢ - ليكن $\underline{x}' = (x_1,\ldots,x_n)$ أوجد المصفوفة A للصيغة التربيعية $\bar{x}^2$ حيث $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i$.

١٣ - لتكن الصيغة التربيعية :

$$Q=6x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2+x_3^2+2x_1x_3+x_4^2+x_1x_4+2x_2x_4$$

اكتب Q على الشكل $\underline{x}'\,A\,\underline{x}$، أوجد $\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}}$.

١٤ - لتكن الصيغة التربيعية $Q=\underline{x}'\,B\,\underline{x}$، حيث :

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(أ) اكتب الصيغة الجبرية المفصّلة لِ Q.

(ب) احسب $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}Q$ في صيغتها المصفوفاتية وفي صيغتها الجبرية المفصلة وتحقّق من تطابق الناتجين.

١٥ - ليكن $\Sigma V=I$ حيث Σ مصفوفة $n\times m$. اكتب المعادلات الناتجة عن هذا الجداء بعد تجزيء Σ وV ثم بيّن بالاستفادة من (١, ٢٤) أن $V_{11}^{-1}V_{12}=-\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}$.

١٦ - لتكن X مصفوفة $n\times p$ رتبتها p، $(p < n)$.

(أ) بيّن أن المصفوفة $X(X'X)^{-1}X'$ متساوية القوى ورتبتها p.

(ب) بيّن أن المصفوفة $I-X(X'X)^{-1}X'$ متساوية القوى ورتبتها $n - p$.

الفصل الثاني

التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات وتوزيعات المعاينة اللامركزية

(١ , ٢) مقدمة

سنستعرض في هذا الفصل التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات وتوزيعات تي وكاي مربع وإف اللامركزية. واستخدام جداول القوة بالاستفادة من التوزيعات اللامركزية.

تعريف (١): نقول إن التوزيع المشترك للمتجه العشوائي $(X_1,\ldots,X_m)$ هو التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات، إذا، وفقط إذا، كانت دالة الكثافة المشتركة:

(٢, ١)
$$f(x_1,\ldots,x_m;\underline{\mu},\Sigma)=\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}}exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right]$$

حيث Σ مصفوفة $m\times m$ متناظرة موجبة محددة سنرمز للعنصر ij منها بالرمز σ_{ij}.

وسنرى أن $Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$ وأن $\underline{\mu}$ من المتجه i العنصر μ_i حيث $E(X_i) = \mu_i$ و$V(X_i) = \sigma_{ii}$. ويسمى المتجه $\underline{\mu}$ المتجه المتوسط، وتسمى المصفوفة Σ مصفوفة التباين والتغاير أو اختصاراً مصفوفة التغاير.

نظرية (١): تكامل دالة الكثافة (٢,١) فوق الفضاء الإقليدي ذي m من الأبعاد يساوي الواحد.

أي أن:

(٢, ٢)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}}exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right]dx_m\ldots dx_1=1$$

برهان: لنقم بالتحويل $\underline{U} = \underline{X} - \underline{\mu}$ ، فقيمة المحدد التفاضلي لهذا التحويل تساوي الواحد، ويصبح التكامل في (٢,٢) على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\underline{u}'\Sigma^{-1}\underline{u}\right] du_m \ldots du_1 \qquad (٢,٣)$$

وبما أن Σ^{-1} مصفوفة متناظرة موجبة محددة فيمكن إيجادمصفوفة مثلثة T بحيث يكون $T'\,\Sigma^{-1}\,T = I$ لنضع $\underline{u} = T\,\underline{w}$، فالمحدد التفاضلي لهذا التحويل هو $|T|$. ولكن $|T'|\,|\Sigma^{-1}|\,|T| = 1$ تؤدي إلى $|T|^2 = |\Sigma|$ أو $|T| = |\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ ونجد أيضا أن:

$$\underline{u}'\,\Sigma^{-1}\,\underline{u} = \underline{w}'\,T'\Sigma^{-1}\,T\,\underline{w} = \underline{w}'\,w = \sum_{1}^{m} w_i^2$$

وبالتعويض في (٢,٣) يصبح ما تحت التكامل:

$$g(w_1,\ldots,w_m) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}}\,|\Sigma|^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i^2\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \prod_{i=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}w_i^2} = \prod_{i=1}^{m} g_i(w_i)$$

حيث $g_i(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w_i^2}$ ، $i = 1,\ldots,m$ ويصبح التكامل في (٢,٣):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(w_1,\ldots,w_m)\,dw_m \ldots dw_1 = \prod_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(w_i)\,dw_i = 1$$

(٢,٢) التوزيعات الهامشية

كما نعلم، يسمى التوزيع المشترك لأي مجموعة جزئية من $p < m$ من عناصر المتجه $\underline{X}$، مغفلين العناصر الـ $m\text{-}p$ الباقية، التوزيع الهامشي. لنسحب العناصر الـ p التي نهتم بإيجاد توزيعها المشترك بحيث تحتل المواقع الـ p الأولى من المتجه $\underline{X}$ ، ولنرمز لهذه المجموعة من العناصر أو المتغيرات بالرمز $\underline{X}_{(1)}$، ولما بقي من عناصر $\underline{x}$ بالرمز $\underline{X}_{(2)}$ ويتضمن $m\text{-}p$ متغيرا، وعندئذ يمكن كتابة المتجه العمود $\underline{X}$ على الشكل المجزّأ:

$$\underline{X} = \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix} \left[\frac{\underline{X}_{(1)}}{\underline{X}_{(2)}} \right] \tag{٢, ٤}$$

وينقسم المتجه $\underline{\mu}$ والمصفوفة Σ وفقا لذلك ليصبحا :

$$\underline{\mu} = \left[\frac{\underline{\mu}_{(1)}}{\underline{\mu}_{(2)}} \right], \ \Sigma = \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix} \overset{\begin{matrix} p & m-p \end{matrix}}{\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}} \tag{٢, ٥}$$

نظـــرية (٢): ليكن توزيـع المتجه العشـوائي $\underline{X}$ بـ m مـن المتغيرات هو التوزيع الطبيعـي $N_m(\underline{\mu},\Sigma)$. ولـيكن $\underline{X} = \left[\frac{\underline{X}_{(1)}}{\underline{X}_{(2)}} \right]$ حـيث يتضـمن $\underline{X}_{(1)}$ المـتغيرات X_1 ، ... ، X_p ويتضـمن $\underline{X}_{(2)}$ المـتغيرات الباقـية X_{p+1} ، ... ، X_m. فعـندئذ تكـون دالـة الكـثافة المشـتركة الهامشية للمتجه $\underline{X}_{(1)}$ هي :

$$g(x_1,\ldots,x_p) = \frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{p/2}} exp\left[(\underline{x}_{(1)} - \underline{\mu}_{(1)})' \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_{(1)} - \underline{\mu}_{(1)}) \right]$$

أي دالة كثافة التوزيع الطبيعي $N_p(\underline{\mu}_{(1)}, \Sigma_{11})$.

برهان: ليكن $\underline{X} - \underline{\mu} = \underline{W}$ فعندئذ نجد :

$$f(w_1,\ldots,w_m) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2} \underline{w}' \Sigma^{-1} \underline{w} \right] \tag{٢, ٦}$$

وليكن :

$$\underline{W} = \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix} \left[\frac{\underline{W}_{(1)}}{\underline{W}_{(2)}} \right], \ V = \Sigma^{-1} = \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix} \overset{\begin{matrix} p & m-p \end{matrix}}{\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}}$$

فعندئذ يمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned} \underline{w}' V \underline{w} &= \underline{w}'_{(1)} V_{11} \underline{w}_{(1)} + \underline{w}'_{(2)} V_{21} \underline{w}_{(1)} + \underline{w}'_{(1)} V_{12} \underline{w}_{(2)} + \underline{w}'_{(2)} V_{22} \underline{w}_{(2)} \\ &= \left(\underline{w}'_{(2)} V_{22}^{\frac{1}{2}} + \underline{w}'_{(1)} V_{12} V_{22}^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\underline{w}'_{(2)} V_{22}^{\frac{1}{2}} + \underline{w}'_{(1)} V_{12} V_{22}^{-\frac{1}{2}} \right)' \end{aligned}$$

$$-\underline{w}'_{(1)}(V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})\underline{w}_{(1)}$$

وبإجراء التحويل:

$$\underline{Z}' = \underline{w}'_{(2)}V_{22}^{\frac{1}{2}} + \underline{w}'_{(1)}V_{12}V_{22}^{-\frac{1}{2}}$$

نجد من قاعدة الاشتقاق (١, ٢٨) أن $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{w}_{(2)}} = |V_{22}|^{\frac{1}{2}}$ ويكون المحدد التفاضلي للتحويل $\frac{\partial \underline{w}_{(2)}}{\partial \underline{z}} = |V_{22}|^{-\frac{1}{2}}$. وبالتعويض في (٦ , ٢) نجد:

$$f(\underline{w}_{(1)},\underline{z}) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}|V_{22}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\underline{w}'_{(1)}\left(V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}\right)\underline{w}_{(1)}\right]$$

$$exp\left[-\frac{1}{2}\underline{z}'\,\underline{z}\right] \qquad (٢, ٧)$$

ومتذكّرين من (١, ٢٥) و (١, ٢٦) أن $\Sigma_{11}^{-1} = V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}$ و $|\Sigma_{11}| = |\Sigma|\,|V_{22}|$ يمكن كتابة (٢, ٧) على الشكل:

$$f(\underline{w}_{(1)},\underline{z}) = \frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\underline{w}'_{(1)}\Sigma_{11}^{-1}\underline{w}_{(1)}\right].exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{1}^{m-p} z_i^2\right]$$

وبالتكامل فوق z_1، ...، z_{m-p} نجد:

$$f(\underline{w}_{(1)}) = \frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{p/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\underline{w}'_{(1)}\Sigma_{11}^{-1}\underline{w}_{(1)}\right]$$

وأخيرا:

$$f(x_1,...,x_p) = \frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{p/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)}\right)'\Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)}\right)\right] \qquad (٢, ٨)$$

وهو المطلوب.

نظـــرية (٣): إذا كـان $\underline{X}$ متجها عشـوائيا يتـبع التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu},\Sigma)$ فيكون توزيع $\underline{Y} = C\underline{X}$ حيث $|C| \neq 0$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(C\underline{\mu}, C\Sigma C')$.

برهان : لدينا

$$f(x_1,...,x_m) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})' \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})\right]$$

ويكون توزيع $\underline{Y}$:

$$g(y_1,...,y_m) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |C^{-1}|}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(C^{-1}\underline{y}-\underline{\mu})' \Sigma^{-1} (C^{-1}\underline{y}-\underline{\mu})\right]$$

$$= \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |C^{-1}|}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{y}-C\underline{\mu})' C'^{-1} \Sigma^{-1} C^{-1} (\underline{y}-C\underline{\mu})\right]$$

$$= \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |C^{-1}|}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{y}-C\underline{\mu})' (C\Sigma C')^{-1} (\underline{y}-C\underline{\mu})\right]$$

ولكن $|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |C|^{-1} = |C|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |C'|^{-\frac{1}{2}} = |C\Sigma C'|^{-\frac{1}{2}}$ وبالتالي :

$$g(y_1,...,y_m) = \frac{|C\Sigma C'|^{-\frac{1}{2}} |C^{-1}|}{(2\pi)^{m/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{y}-C\underline{\mu})' (C\Sigma C')^{-1} (\underline{y}-C\underline{\mu})\right] \qquad (٢,٩)$$

وهو المطلوب.

(٣, ٢) التوزيعات الشرطية

نظرية (٤): بالعودة إلى النظرية (٢) فإن التوزيع الشرطي للمتجه $\underline{X}_{(1)}$ علما أن المتجه $\underline{X}_{(2)}$ مثبت هو التوزيع الطبيعي :

$$N_p\left[\underline{\mu}_{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underline{x}_{(2)}-\underline{\mu}_{(2)}), \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\right] \qquad (٢, ١٠)$$

برهان: بوضع $\underline{W} = \underline{X} - \underline{\mu}$ وتذكر أن التوزيع الهامشي لِـ $\underline{W}_{(2)}$ هو :

$$P(\underline{w}_{(2)}) = \frac{|\Sigma_{22}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{q/2}} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{w}'_{(2)} \Sigma_{22}^{-1} \underline{w}_{(2)})\right]$$

حيث $q = m - p$، يمكن أن نكتب :

$$g(\underline{w}_{(1)}|\underline{w}_{(2)}) = \frac{f(\underline{w}_{(1)}, \underline{w}_{(2)})}{P(\underline{w}_{(2)})} = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma_{22}|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{q/2}}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}Q} \qquad (٢, ١١)$$

حيث:

$$Q=\left(\underline{w}'_{(1)},\underline{w}'_{(2)}\right)\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{w}_{(1)}\\ \underline{w}_{(2)}\end{pmatrix}-\underline{w}'_{(2)}\left(V_{22}-V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}\right)\underline{w}_{(2)}$$

لنتذكّر أن $\Sigma_{22}^{-1}=V_{22}-V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}$. وبعد التبسيط والاختصار نجد:

$$Q=\underline{w}'_{(1)}V_{11}\underline{w}_{(1)}+\underline{w}'_{(1)}V_{12}\underline{w}_{(2)}+\underline{w}'_{(2)}V_{21}\underline{w}_{(1)}+\underline{w}'_{(2)}V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}\underline{w}_{(2)}$$

$$=\left(\underline{w}_{(1)}+V_{11}^{-1}V_{12}\underline{w}_{(2)}\right)'V_{11}\left(\underline{w}_{(1)}+V_{11}^{-1}V_{12}\underline{w}_{(2)}\right)$$

وباستخدام العلاقات (١, ٢٣) و (١, ٢٤) و(١, ٢٥) وملاحظة أن $V_{11}^{-1}V_{12}=-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ نجد بعد التعويض في (٢, ١١) أن:

$$g\left(\underline{w}_{(1)}\middle|\underline{w}_{(2)}\right)=\frac{\left|\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{p/2}}$$

$$exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{w}_{(1)}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\underline{w}_{(2)}\right)'\left(\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)^{-1}\left(\underline{w}_{(1)}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\underline{w}_{(2)}\right)\right] \qquad (٢, ١٢)$$

وهو المطلوب.

نرمز عادة لمصفوفة التباين والتغاير في التوزيع الشرطي $g(\underline{X}_{(1)}|\underline{X}_{(2)})$ بالرمز $\Sigma_{11.2}$ أي أن: $\Sigma_{11.2}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ ونرمز للعنصر ij من هذه المصفوفة بالرمز $\sigma_{ij.2}$ ويسمى التغاير الجزئي.

وتسهيلا لحساب قيمة المتوسطات ومصفوفة التباين والتغاير في التوزيع الشرطي نقدم قاعدتين مفيدتين، لنفترض أن $\underline{X}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu},\Sigma)$ فيمكن تبيان

ما يلي:

قاعدة (١): متجه المتوسطات في التوزيع الشرطي $\underline{X}_{(1)}|\underline{X}_{(2)}$ هو المتجه الناتج عن حل جملة المعادلات $\frac{\partial Q}{\partial \underline{X}_{(1)}}=0$ ، حيث $Q = (\underline{X}-\underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{X}-\underline{\mu})$ هو الصيغة التربيعية لتوزيع المتجه $\underline{X}$.

قاعدة (٢): يمكن الحصول على مصفوفة التباين والتغاير $\Sigma_{11.2}$ للتوزيع الشرطي $\underline{X}_{(1)}|\underline{X}_{(2)}$ بحذف السطور والأعمدة المقابلة لعناصر $\underline{X}_{(2)}$ في المصفوفة $V=\Sigma^{-1}$ ثم أخذ معكوس المصفوفة المتبقية.

تعريف (٢): المصفوفة $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ هي مصفوفة المعاملات في انحدار $\underline{X}_{(1)}$ على $\underline{X}_{(2)}$. ونرمز للعنصر ij من هذه المصفوفة بالرمز β_{ij} أي:

$$\left(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\right)_{ij} = \beta_{ij} \qquad (٢, ١٣)$$

حيث $i = 1,\ldots,p \quad , \quad j = p+1,\ldots,m$. ويسمى المتجه:

$$E\left(\underline{X}_{(1)}\middle|\underline{X}_{(2)}\right) = \underline{\mu}_{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{X}_{(2)} - \underline{\mu}_{(2)}\right) \qquad (٢, ١٤)$$

دالة انحدار $\underline{X}_{(1)}$ على $\underline{X}_{(2)}$.

تعريف (٣): يسمى المقدار:

$$\rho_{ij.2} = \frac{\sigma_{ij.2}}{\sqrt{\sigma_{ii.2}.\sigma_{jj.2}}};\ i = 1,\ldots, p \ ; \quad j = 1,..,p \qquad (٢, ١٥)$$

معامل الارتباط الجزئي بين X_i وX_j علما أن X_{p+1} ، ... ، X_m مثبتة.

تعريف (٤): يسمى المقدار:

$$R_{i.(2)} = \sqrt{\frac{\left(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)_{ii}}{\sigma_{ii}}} \quad , \quad i = 1,\ldots,p \qquad (٢, ١٦)$$

معامل الارتباط المتعدد بين X_i و$X_{(2)}$. وبما أن $\sigma_{ii.2} = \sigma_{ii} - \left(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)_{ii}$ حيث $\sigma_{ii.2}$ العنصر ii من $\Sigma_{11.2}$ ، فيمكن كتابة:

$$\sigma_{ii.2} = \sigma_{ii}\left(1 - R_{i.(2)}^2\right) \quad , \quad i = 1,\ldots,p \qquad (٢, ١٧)$$

أو:

$$Ri_{\cdot(2)} = \sqrt{\frac{\sigma_{ii} - \sigma_{ii.2}}{\sigma_{ii}}} \quad , \; i = 1,\dots,p \qquad (٢, ١٨)$$

(٢ , ٤) الدالة المميزة

نظرية (٥): الدالة المميزة للمتجه العشوائي $\underline{X}$ الذي يتوزع احتماليا وفق التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ هي:

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{i\underline{t}'\underline{X}}) = e^{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}} \qquad (٢, ١٩)$$

حيث $\underline{t}$ متجه حقيقي.

برهان: بما أن المصفوفة Σ^{-1} متناظرة وموجبة محددة فيمكن إيجاد مصفوفة مثلثة T بحيث يكون $T'\Sigma^{-1}T = I$ وبالتالي يكون $(TT')^{-1} = T^{-1}\Sigma^{-1} = T'^{-1}$ أو $\Sigma = TT'$. لنعتبر التحويل $\underline{X} - \underline{\mu} = T\underline{Y}$ فيكون توزيع $\underline{Y}$ عندئذ هو التوزيع $N_m(\underline{0}, I)$، وذلك بالاستناد إلى النظرية (٣). والدالة المميزة للمتجه $\underline{Y}$ هي:

$$\phi_{\underline{Y}}(\underline{\theta}) = E\left(e^{i\underline{\theta}'\underline{Y}}\right) = \prod_{j=1}^{m} E\left[e^{i\theta_j Y_j}\right] = \prod_{j=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}\theta_j^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2} = e^{-\frac{1}{2}\underline{\theta}'\underline{\theta}}$$

ومنه نجد:

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E\left(e^{i\underline{t}'\underline{X}}\right) = E\left[e^{i\underline{t}'(T\underline{y}+\underline{\mu})}\right]$$

$$= \left(e^{i\underline{t}'\underline{\mu}}\right)E\left(e^{i\underline{t}'T\underline{Y}}\right)$$

وبأخذ $\underline{\theta}' = \underline{t}'T$، نجد:

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{it'\underline{\mu}}\,\phi(T'\underline{t}) = e^{i\underline{t}'\underline{\mu}} . e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}'T)(T'\underline{t})}$$

$$= e^{i\underline{t}'\underline{\mu}} . e^{-\frac{1}{2}\underline{t}'TT'\underline{t}} = e^{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (١): لإيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_{\underline{X}}(\underline{t})$ وهي بالتعريف:

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{\underline{t}'\underline{X}}) \qquad (٢, ٢٠)$$

يكفي وضع it_j - بدلا من كل مركبة t_j من مركبات المتجه $\underline{t}' = (t_1,\ldots,t_m)$، وبالتالي وضع $i\underline{t}$ - بدلا من $\underline{t}$، في عبارة الدالة المميزة.

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \phi_{\underline{X}}(i\underline{t}) = e^{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}} \qquad (٢, ٢١)$$

ملاحظة (٢): من الاستخدامات المفيدة للدوال المميزة ودوال العزوم أنه يمكن التعرف بسهولة على الدالة المميزة لأي مجموعة جزئية نختارها من مركبات المتجه $\underline{X}' = (X_1,\ldots,X_m)$ وذلك بوضع صفر بدلا من كل t_j مقابلة لمتغير X_j من المتغيرات التي أغفلناها، فمثلا، يمكن إيجاد الدالة المميزة للمجموعة $\underline{X}_{(1)} = (X_1,\ldots,X_p)$ الواردة في النظرية (٢) الخاصة بالتوزيع الهامشي بوضع $t_{p+1} = t_{p+2} = \ldots = t_m = 0$ أي $\underline{t}_{(2)} = \underline{0}$. وبكتابة الدالة المميزة بالشكل المجزّأ نجد:

$$\phi_{\underline{X}_{(1)},\underline{X}_{(2)}}(\underline{t}_{(1)},\underline{t}_{(2)}) = exp\left[\left(\underline{t}'_{(1)}\middle|\underline{t}'_{(2)}\right)\begin{pmatrix}\underline{\mu}_{(1)}\\ \hline \underline{\mu}_{(2)}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\underline{t}'_{(1)}\middle|\underline{t}'_{(2)}\right)\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\mu}_{(1)}\\ \hline \underline{\mu}_{(2)}\end{pmatrix}\right]$$

وبوضع $\underline{t}_{(2)} = \underline{0}$ نجد:

$$\phi_{\underline{X}_{(1)}}(\underline{t}_{(1)}) = exp\left[\underline{t}'_{(1)}\underline{\mu}_{(1)} - \frac{1}{2}\underline{t}'_{(1)}\Sigma_{11}\underline{t}_{(1)}\right] \qquad (٢, ٢٢)$$

وهي الدالة المميزة المقابلة لتوزيع طبيعي $N_p(\underline{\mu}_{(1)}, \Sigma_{11})$. وهي النتيجة نفسها التي وصلنا إليها في النظرية ٢ الخاصة بالتوزيع الهامشي.

ملاحظة (٣): كما في حالة متغير واحد لدينا من تعريف الدالة المولدة للعزوم (أو الدالة المميزة):

$$\frac{\partial}{\partial \underline{t}} M_X(t)\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{\partial}{\partial \underline{t}} E\left(e^{\underline{t}'\underline{X}}\right)\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$$= E\frac{\partial}{\partial \underline{t}}\left(e^{\underline{t}'\underline{X}}\right)\bigg|_{\underline{t}=0} = E\left[e^{\underline{t}'\underline{X}}.\underline{X}\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}}\right] = E(\underline{X})$$

وبتطبيق هذه النتيجة على الدالة المولدة للعزوم في (2.21) نجد:

$$E(\underline{X}) = \frac{\partial}{\partial \underline{t}} M_{\underline{x}}(\underline{t})\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{\partial}{\partial \underline{t}} exp\left[\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right]\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}} =$$

$$exp\left[\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right].\frac{\partial}{\partial \underline{t}}\left(\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right)\bigg|_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$$= \underline{\mu} + \Sigma\underline{t}\big|_{\underline{t}=\underline{0}} = \underline{\mu} \qquad (٢, ٢٣)$$

أي أن $E(X_i) = \mu_i$ ، $i = 1,\ldots,m$ ، ومتجه المعالم $\underline{\mu}$ هو، في الواقع، متجه المتوسطات. ويمكن تبيان أن مصفوفة المعالم Σ هي مصفوفة التباين والتغاير أي أن $\sigma_{ii}=V(X_i)$ ، و $\sigma_{ij} = Cov\,(X_i, X_j)$. $i, j = 1,\ldots,m$. والبرهان متروك كتمرين للطالب.

(٥ , ٢) توزيع كاي مربع اللامركزي

نعلم أنه إذا كانت المتغيرات X_1 ، ... ، X_n مستقلة ويتوزع كل منها وفق التوزيع $N(0, 1)$ فإن توزيع $\sum_1^n X_i^2$ هو التوزيع $\chi^2(n)$. وسندرس الآن توزيع $z = \sum_1^n X_i^2$ حيث يتوزع X_i وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu_i, 1)$ ، $i = 1,\ldots,n$. أي أن $E(X_i) = \mu_i$.

ليكن $\sum_1^n \mu_i^2 = 2\lambda$ ، فيمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة للمتجه $\underline{X}' = (X_1,\ldots,X_n)$ على الشكل:

$$dF \,\alpha\, exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'(\underline{x}-\underline{\mu})\right]\prod_{i=1}^{n} dx_i \tag{٢, ٢٤}$$

حيث يعني الرمز α تناسب طرفي العلاقة. ليكن $\underline{Y} = B\underline{X}$ حيث $BB' = I$ ، (B مصفوفة متعامدة) فعندئذ $\underline{\theta} = E(\underline{Y}) = E(B\underline{X}) = B\,\underline{\mu}$ و:

$$\sum_1^n \theta_i^2 = \underline{\theta}'\underline{\theta} = \underline{\mu}' B' B \underline{\mu} = \underline{\mu}'\ \underline{\mu} = \sum_1^n \mu_i^2 = 2\lambda = \lambda'. \tag{٢, ٢٥}$$

ويمكن تحديد عناصر المصفوفة B بحيث يكون $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-1} = 0$ و $\theta_n^2 = \lambda'$ وهكذا نجد:

$$z = \sum_1^n x_i^2 = \underline{x}'\underline{x} = \underline{y}'\ \underline{y} = \sum_1^n y_i^2$$

حيث Y_1 ، ... ، Y_{n-1} متغيرات طبيعية معيارية $N(0,1)$ وY_n متغير طبيعي متوسطه $\theta_n = \sqrt{\lambda'}$ وتباينه الواحد والمتغيرات Y_1 ، ... ، Y_n مستقلة فيما بينها. لنكتب الآن:

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 \quad , \quad T = Y_n^2$$

فعندئذ يتوزع U وفق التوزيع $\chi^2(n\text{-}1)$ بينما يمكن التعبير عن توزيع Y_n بالعبارة:

$$dF_{y_n} \,\alpha\, exp\left[-\frac{1}{2}\left(y_n - \sqrt{\lambda'}\right)^2\right] dy_n$$

وهكذا يمكن التعبير عن توزيع T بالعبارة:

$$dF_v = f_1(t)\,dt \,\alpha\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\left\{exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda'}\right)^2\right] + exp\left[-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{t}-\sqrt{\lambda'}\right)^2\right]\right\} dv$$

والتوزيع المشترك للمتغيرين المستقلين U وT هو:

$$dF(u,t) \,\alpha\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t+\lambda')} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda' t)}{(2r)!} e^{-\frac{1}{2}u} u^{\frac{1}{2}(n-3)}\, dudt$$

وبإجراء التحويل $z=u+t$ ، $w=\dfrac{u}{u+t}$ ، نجد $u=z\,w$ ، $t=z(1-w)$ ، $|J|=z$ ،

ويكون التوزيع المشترك لِـ Z ، W معطى بالعبارة التالية :

$$dG(z,w)\,\alpha\, z^{-\frac{1}{2}}(1-w)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}[z(1-w)+\lambda']}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda'^{r}z^{r}(1-w)^{r}}{(2r)!}e^{-\frac{1}{2}zw}\,z^{\frac{1}{2}(n-3)}w^{\frac{1}{2}(n-3)}\,z\,d\,w\,d\,z=$$

$$e^{-\frac{1}{2}(z+\lambda')}\,z^{\frac{1}{2}(n-2)}w^{\frac{1}{2}(n-3)}(1-w)^{-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda'^{r}z^{r}}{(2r)!}(1-w)^{r}\,d\,w\,d\,z$$

وبالمكاملة فوق z من 0 إلى 1 نحصل على التوزيع $H(Z)$ للمتغير Z :

$$dH(z)=c\,e^{-\frac{1}{2}(z+\lambda')}\,z^{\frac{1}{2}(n-2)}\int_{0}^{1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda'^{r}z^{r}}{(2r)!}\,w^{\frac{1}{2}(n-3)}(1-w)^{r-\frac{1}{2}}\,d\,w$$

$$=c\,e^{-\frac{1}{2}(z+\lambda')}\,z^{\frac{1}{2}(n-2)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda'^{r}z^{r}}{(2r)!}Be\left[\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}+r\right]d\,z$$

ولحساب ثابت التناسب c نلاحظ أولا أن هذا الثابت مستقل عن λ' ، وبوضع $\lambda'=0$ في هذه العلاقة الأخيرة يجب أن تكون العبارة الناتجة هي بالضبط عبارة التوزيع $\chi^2(n)$ ، (لاحظ الآن أن الحد الوحيد الذي لا ينعدم من حدود السلسلة اللانهائية هو الحد الأول المقابل لِـ $r=0$) وهذا يعني أن :

$$c\,Be\left[\frac{1}{2}(n-2),\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}$$

ومنه نجد :

$$c=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}$$

وأخيرا ، وبكتابة v ، وهو الرمز المعتاد لعدد درجات الحرية ، بدلا من n نجد :

$$dH(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(z+\lambda')}\,z^{\frac{1}{2}(v-2)}}{2^{\frac{1}{2}v}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(v-1)\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda'^{r}z^{r}}{(2r)!}Be\left[\frac{1}{2}(v-1),r+\frac{1}{2}\right]d\,z \qquad (٢, ٢٦)$$

ويمكن كتابة (٢, ٢٦) بحيث نعبر عن توزيع χ^2 اللامركزي بدلالة توزيعات χ^2 مركزية. إذا وضعنا 2λ بدلا من λ' في (٢, ٢٦) وعوضنا عن الدالة بيتا بما تساويه بدلالة الدالة جاما نجد:

$$dH(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)e^{-\lambda}\lambda^r z^{\frac{1}{2}(v+2r)-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}v-r}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v+r\right)(2r)!}e^{-\frac{1}{2}z}$$

ولكن $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2^r}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ و $(2r)!=1.3.5\ldots(2r-1).2^r\,r!$ وبالتالي:

$$\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{(2r)!}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2r}\,r!} \qquad (٢, ٢٧)$$

وبالتعويض نجد:

$$dH(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}\,\frac{z^{\frac{1}{2}(v+2r)-1}\,e^{-\frac{1}{2}z}}{2^{\frac{1}{2}(v+2r)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(v+2r)\right]}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}\,g_{v+2r}^{(z)} \qquad (٢, ٢٨)$$

حيث $g_{v+2r}^{(z)}$ توزيع χ^2 مركزي بعدد $v+2r$ درجة حرية. وهكذا نجد أن توزيع كاي مربع اللامركزي بعدد v درجة حرية ومعلمة لا مركزية λ هو مجموع عدد لا نهائي من توزيعات χ^2 المركزية كل منها مثقّل أو مرجّح بترجيحة هي حد من حدود دالة بواسون.

(٦, ٢) الدالة المولدة للعزوم لتوزيع χ^2 اللامركزي

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})=\int_0^{\infty}e^{tz}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}g_{v+2r}(z)\,dz$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}\int_0^{\infty}e^{tz}\,g_{v+2r}(z)\,dz=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}(1-2t)^{-\frac{1}{2}(v+2r)} \qquad (٢, ٢٩)$$

ويمكن حساب $E(Z)$ و$V(Z)$ باستخدام الدالة المولدة للعزوم.

$$E(Z)=\left.\frac{dM_Z(t)}{dt}\right|_{t=0}=e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}(v+2r)(1-2t)^{-\frac{1}{2}(v+2r)-1}\Big|_{t=0}$$

$$=\nu+2\sum_{r=0}^{\infty} r\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}=\nu+2E(r)=\nu+2\lambda \qquad (٢,٣٠)$$

ونصل إلى النتيجة نفسها بالعودة إلى العلاقة $Z = U + T$ حيث $U=\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$ و $T = Y_n^2$ و$E(U) = n\text{-}1$ بالفرض و $E(T) = V(Y_n) + E\left(Y_n^2\right)=1+2\lambda$ ومنه $E(T) = \nu + 2\lambda$، متذكرين أن $\nu = n$. ويمكن تبيان أن:

$$V(Z) = 2(\nu + 4\lambda) \qquad (٢,٣١)$$

وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.

تعليق❖: يمكن تعميم المعالجة السابقة لاشتقاق عبارة توزيع χ^2 اللامركزي إلى الحالة التي يتوزع فيها المتجه $\underline{X}'=(X_1,\ldots,X_n)$ وفق التوزيع $N_n(\underline{\mu},\Sigma)$. نعلم أنه توجد مصفوفة متعامدة B بحيث يكون $B'\Sigma^{-1}B = C$ وحيث تشكل الجذور المميزة للمصفوفة Σ^{-1} العناصر القطرية للمصفوفة القطرية C. لنقم بالتحويل $\underline{X} = B\underline{Y}$ فيتحول $\underline{X}'\Sigma^{-1}\underline{X}$ إلى الصيغة التربيعة $\underline{Y}'C\underline{Y}$. إذا كان $n\text{-}r \geq 0$ من العناصر القطرية للمصفوفة C أصفارا فسنحصل على صيغة تربيعية تتضمن، في الواقع، r من المتغيرات Y. وبالتحويل من $\underline{Y}$ إلى $\underline{Z}$ وفق التحويل $\underline{Y} = D\,\underline{Z}$ حيث D مصفوفة قطرية تحقق العلاقة $D^{2} = C^{-1}$، فعندئذ يكون:

$$\underline{X}'\Sigma^{-1}\underline{X} = \underline{Y}'C\underline{Y} = \underline{Z}'\underline{Z}$$

حيث يتضمن المتجه $\underline{Z}$ عدد r من المتغيرات الطبيعية المستقلة، تباين كل منها الواحد، ويحقق متجه المتوسطات $E(\underline{Z}) = \underline{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_r)$ العلاقة:

$$\underline{\mu} = B\,D\,\underline{\theta}$$

وبذلك نكون قد اختزلنا الحالة هذه إلى الحالة التي نوقشت في الفقرة السابقة مع معلمة لا مركزية λ معطاة بالعلاقة التالية:

$$\lambda=\frac{1}{2}\underline{\theta}'\,\underline{\theta}=\frac{1}{2}\underline{\mu}'\Sigma^{-1}\,\underline{\mu} \qquad (٢,٣٢)$$

أي أن توزيع $\underline{X}'\Sigma^{-1}\underline{X}$ حيث يتوزع $\underline{X}$ وفق التوزيع الطبيعي $N_n(\underline{\mu}, \Sigma)$ هو التوزيع χ^2 اللامركزي بـ r درجة من الحرية حيث r رتبة Σ، وبمعلمة لا مركزية $\lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}'\Sigma^{-1}\underline{\mu}$

(٢، ٧) توزيع F اللامركزي*

لنعتبر أولا توزيع نسبة متغيرين Z_1، Z_2 مستقلين ويتوزعان وفق توزيع χ^2 اللامركزي بـ v_1، v_2 درجة من الحرية، على الترتيب، وبمعلمتي لا مركزية λ_1، λ_2، على الترتيب، فالتوزيع المشترك للمتغيرين هو:

$$d\,g(z_1, z_2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(z_1+\lambda_1)}\, z_1^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{2^{\frac{1}{2}v_1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1-1)\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^r z_1^r}{(2r)!}Be\left[\frac{1}{2}(v_1-1), r+\frac{1}{2}\right]\times$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(z_2+\lambda_2)}\, z_2^{\frac{1}{2}(v_2-2)}}{2^{\frac{1}{2}v_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_2-1)\right]}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^s z_2^s}{(2s)!}Be\left[\frac{1}{2}(v_2-1), s+\frac{1}{2}\right] \qquad (٢، ٣٣)$$

وبوضع $u = \frac{z_1}{z_2}$، $v = z_2$، وعندئذ $|J| = v$، نجد بعض التعويض في (2.28):

$$dH(u) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}(uv+\lambda_1)}\,(uv)^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{2^{\frac{1}{2}v_1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1-1)\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^r (uv)^r}{(2r)!}Be\left[\frac{1}{2}(v_1-1), r+\frac{1}{2}\right]\times$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(v+\lambda_2)}\, v^{\frac{1}{2}v_2-1}}{2^{\frac{1}{2}v_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_2-1)\right]}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^s v^s}{(2s)!}Be\left[\frac{1}{2}(v_2-1), s+\frac{1}{2}\right] v\,dv\,du$$

وبوضع $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$، $v = v_1 + v_2$ والتبسيط نجد:

$$dH(u)\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{2^{\frac{1}{2}v}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^r}{(2r)!}\frac{\lambda_2^s}{(2s)!}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}v_1+r\right]}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}v_2+s\right]}$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v(1+u)} v^{\frac{1}{2}v+r+s-1} dv\right] v^{\frac{1}{2}v_1+r-1} du \qquad (٢,٣٤)$$

والتكامل بين قوسين يساوي $\Gamma\left(\frac{1}{2}v+r+s\right) \Big/ \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\frac{1}{2}v+r+s}$ وهكذا نجد :

$$dH(u)=e^{-\frac{1}{2}\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^r\lambda_2^s}{(2r)!(2s)!}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)2^{r+s}}{Be\left(\frac{1}{2}v_1+r,\frac{1}{2}v_2+s\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$u^{\frac{1}{2}v_1+r-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}v+r+s} du \qquad (٢,٣٥)$$

ولكن :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}{(2s)!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(s+\frac{1}{2}-(s-1)\right)\left(s+\frac{1}{2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}-s\right)}{(2s)(2s-1)(2s-2)\ldots4.3.2.1\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2^s}(2s-1)(2s-3)\ldots3.1.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2s)(2s-1)\ldots4.3.2.1\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2^{2s}\,s!}$$

وهذا يسمح لنا بكتابة :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)2^{r+s}}{(2r)!(2s)!\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2^{r+s}\,r!s!}$$

وبالتالي يمكن تبسيط (٢,٣٠) لتصبح كما يلي :

$$dH(u)=\frac{1}{Be\left(\frac{1}{2}v_1+r,\frac{1}{2}v_2+s\right)}e^{-\frac{1}{2}\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^r}{r!}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^s}{s!}u^{\frac{1}{2}v_1+r-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}v+r+s} du \qquad (٢,٣٦)$$

تعريف (٥): نقول إن توزيع النسبة :

$$F' = \frac{Z_1 / v_1}{Z_2 / v_2} = \frac{v_2}{v_1} \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (٢, ٣٧)$$

حيث Z_1 متغير χ^2 لا مركزي بعدد من درجات الحرية v_1 وبمعلمة لا مركزية λ و Z_2 متغير χ^2 مركزي مستقل عن Z_1 وبعدد v_2 من درجات الحرية، هو توزيع إف (F) اللامركزي بعدد من درجات الحرية v_1 في البسط وv_2 في المقام وبمعلمة لا مركزية λ، ونرمز له عادة بالرمز $F'(v_1, v_2; \lambda)$.

وللحصــول على توزيــع F اللامركــزي نضع $F' = \frac{v_2}{v_1} u$ و$\lambda_2 = 0$ و$\lambda_1 = \lambda$ في (٢, ٣١) متذكرين أن وضع $\lambda_2 = 0$ يؤدي إلى انعدام جميع حدود السلسلة باستثناء حدها الأول المقابل لِ $s = 0$، فنجد :

$$dG(F') = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^r \Big/ r!\right]\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{2}v_1 + r}}{Be\left(\frac{1}{2}v_1 + r, \frac{1}{2}v_2\right)} \frac{(F')^{\frac{1}{2}v_1 + r - 1}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} F'\right)^{\frac{1}{2}(v_1 + v_2) + r}} dF' \qquad (٢, ٣٨)$$

وتُختزل هذه العبارة إلى عبارة توزيع F المركزي بوضع $\lambda = 0$.

(٢ , ٨) توزيع t اللامركزي

نعلم أن التوزيع المركزي $F(1, v_2)$ هو مربع توزيع t المركزي $t(v_2)$، وكذلك الأمر نجد أن التوزيع اللامركزي $F'(1, v_2)$ بمعلمة لا مركزية λ هو مربع توزيع t اللامركزي $t'\left(v_2, \sqrt{\lambda}\right)$ ، أي أن $F'(1, v_2; \lambda) = t'^2(v_2, \delta)$ حيث $\delta^2 = \lambda$.

تعريف (٦): نقول إن توزيع النسبة :

$$t' = \frac{U + \delta}{\sqrt{\chi^2(v_2) / v_2}} \qquad (٢, ٣٩)$$

حيث U متغيراً طبيعياً معيارياً مستقلاً عن $\chi^2(v_2)$ هو توزيع t' اللامركزي بمعلمة لا مركزية δ وv_2 درجة من الحرية.

وبوضع $v_1 = 1$ و$\lambda = \delta^2$ في (٣٨ , ٢)نحصل على عبارة $F'(1, v_2)$ وإذا أجرينا التحويل $F'=t'^2$ نحصل على توزيع $t'(v_2, \delta)$ حيث v_2 عدد درجات الحرية وδ معلمة اللامركزية.

وتستمد توزيعات المعاينة اللامركزية تي وكاي مربع وإف أهميتها من أهمية توزيعات المعاينة المركزية المقابلة لها t وχ^2 وF، إذ تشكل الإحصاءات t وχ^2 وF المركزية إحصاءات الاختبار في معظم الفرضيات الإحصائية التي نواجهها في تطبيقات الإحصاء وفي التحليل الإحصائي. وإذا كاملنا التوزيع المركزي فوق منطقة الرفض نحصل على ما يسمى مستوى الأهمية α للاختبار الذي نقوم به أو حجم الخطأ من النوع الأول بينما نحصل على قوة الاختبار إذا كاملنا فوق منطقة الرفض ذاتها التوزيع اللامركزي المقابل. وهناك جداول تعطي قوة الاختبار من أجل قيم مختلفة لحجم العينة وقيم مختلفة للمسافة بين القيمة التي تحددها الفرضية العدم H_0 والقيم البديلة التي تحددها الفرضية البديلة H_1. ومثل هذه الجداول مهمة من زاويتين إذ نريد معرفة قوة اختبار قمنا به من جهة ومن جهة أخرى نحتاج إلى هذه الجداول عند تصميم دراسة إحصائية وذلك لتحديد حجم العينة n اللازم للوصول إلى اختبارات تتمتع بقوة حددناها سلفاً.

(٩ , ٢) تمارين

١ - إذا كانت A مصفوفة متناظرة من الثوابت $n\times n$ وR مصفوفة متناظرة من الثوابت موجبة محددة $n\times n$ فاحسب التكامل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(\underline{x}-\underline{c})'A(\underline{x}-\underline{c})\,exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{c})'R(\underline{x}-\underline{c})'\right]dx_1\ldots dx_n$$

٢ - ليكن المتجـه $\underline{Y}' = (Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$ متجها عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي $N_4(\underline{\mu}, \Sigma)$. والصيغة التربيعية $Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\underline{Y} - \underline{\mu})$ معطاة على الشكل :

$$Q = 3y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + y_4^2 + 2y_1y_2 + 2y_3y_4 - 6y_1 - 2y_2 - 6y_3 - 2y_4 + 8$$

(أ) أوجد Σ^{-1} ثم Σ. (ب) أوجد $\underline{\mu}$.

(ج) أوجد $h(y_1 | y_2,y_3,y_4)$ (د) أوجد $f_1(y_1)$، $f_2(y_2, y_3)$

(هـ) أوجد ρ_{12} (و) أوجد $\rho_{13.2}$ و$R_{1.(2)}$ مستفيدا مماوجدته في (ج).

٣ - ليكن $\underline{X}$ متجها عشوائيا $m\times 1$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu},\Sigma)$ بيّن أن توزيع $Q = (\underline{X}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{X}-\underline{\mu})$ هو التوزيع $\chi^2(m)$.

٤ - الدالة المولدة للعزوم لمتجه عشوائي $\underline{X}$ هي :

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left[t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_1t_2 - t_1t_3\right]$$

أوجد قيمة الثابت c بحيث يكون :

$$Pr\,[2X_1 - Xx_2 + X_3 > c] = .95$$

٥ - بيّن أن مصفوفة المعالم Σ الواردة في تعريف التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات هي مصفوفة التباين والتغاير أي أن $V(X_i) = \sigma_{ii}$ و$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$، $i, j = 1,\ldots,m$.

٦ - إذا كان للمتجه $\underline{Y}$ التوزيع الطبيعي بمتوسط $\underline{\mu} = 0$ ومصفوفة تباين وتغاير :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد Σ^{-1} (ب) أوجد التوزيع الهامشي لـِ $\underline{Y}$.

(ج) أوجد التوزيع المشترك لـِ Y_1 وY_2.

(د) أوجد التوزيع الشرطي لـِ Y_1 عند تثبيت ، Y_2 وY_3.

(هـ) أوجد ρ_{12} ، ρ_{13} وρ_{23} (و) أوجد $\rho_{12.3}$ و $R^2_{1.23}$.

(ز) في (د) أوجد معاملي الانحدار β_3 وβ_2.

(ح) أوجد متوسط وتباين Z حيث $Z = 4Y_1-6Y_2+Y_3$.

٧ - إذا كان Y_1 ، Y_2 ، Y_3 تتوزع بصورة مشتركة وفقا لتوزيع طبيعي مصفوفته التربيعية هي :

$$Q = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3 - 6y_1 - 6y_2 + 10y_3 + 8$$

(أ) أوجد Σ^{-1} ، Σ ، $\underline{\mu}$ (ب) أوجد $f(y_1 | y_2, y_3)$ و $R^2_{1.(2)}$.

٩ - أوجد باستخدام جداول تانج (*Tang*) قوة الاختبار في كل من الحالات التالية :

n_1	2	4	5	6	3	7	7
n_2	6	2	18	30	5	2	4
λ	6	10	18.75	15	4.5	36	64

١٠ - المتجه $\underline{Y}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N_3(\theta, \Sigma)$ حيث $\underline{\theta}' = (2, 1, 2)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، أوجد التوزيع المشترك لـ $Z_1 = (Y_1 + Y_2 + Y_3)$ ، $Z_2 = Y_1 - Y_2$.

١١ - إذا كان المتجه $\underline{Y}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N_n(\underline{\theta}, I_n)$ أوجد التوزيع المشترك للتركيبين الخطيين $L = \underline{a}'\ \underline{Y}$ و$M = \underline{b}'\ \underline{Y}$ حيث $\underline{a}'\underline{b} = 0$ بالتالي بيّن أن L وM مستقلان.

١٢ - بيّن بالاستفادة من التمرين (١١) أنه إذا كانت Y_1 ، ... ، Y_n متغيرات طبيعية معيارية مستقلة فإن $\overline{Y}$ و $Y_i - \overline{Y}$ مستقلان لكل i.

١٣ - المتجه $\underline{Y}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري $N_n(\underline{0}, I_n)$. أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتجه $\underline{U}' = (\overline{Y}, Y_1 - \overline{Y}, ..., Y_n - \overline{Y})$ ثم استنتج أن $\overline{Y}$ و $\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$ مستقلان.

١٤ - اثبت علاقة تباين توزيع χ^2 اللامركزي المعطاة في (٢ , ٣١).

الفصل الثالث

توزيعات صيغة تربيعية

(٣,١) توزيع صيغ تربيعية مركزية $Q = (\underline{y} - \underline{\mu})' G (\underline{y} - \underline{\mu})$

نظرية (١): ليكن المتجه العشوائي $\underline{Y}$ الذي يتبع التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu},\Sigma)$ ، Σ ، مصفوفة $m\times m$ موجبة محددة. لتكن الصيغة التربيعية $Q = (\underline{y} - \underline{\mu})' G (\underline{y} - \underline{\mu})$ حيث G أي مصفوفة حقيقية متناظرة. فعندئذ يتوزع المتغير العشوائي Q كتركيب خطي في m من متغيرات كاي مربع المستقلة، كل منها بدرجة واحدة من الحرية أي:

$$Q = \lambda_1\, \chi_1^2(1) + \lambda_2 \chi_2^2(1) + \ldots + \lambda_m\, \chi_m^2(1) \qquad (٣, ١)$$

حيث المعاملات λ_j ، $j = 1,\ldots,m$ هي الجذور المميزة للمصفوفة $G\Sigma$ أو ΣG.

برهان: لنأخذ الدالة المميزة للمتغير Q فنجد:

$$\phi_Q(t) = E(e^{itQ}) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} \int_{R_m} exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{y}-\mu)'(\Sigma^{-1} - 2it\, G)(\underline{y}-\underline{\mu})\right] d\underline{y} \qquad (٣, ٢)$$

$$= \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} \cdot \frac{(2\pi)^{m/2}}{|\Sigma^{-1} - 2it\, G|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|\Sigma^{-1} - 2it\, G|^{\frac{1}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|I - 2it\, G\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون ΣG أو $G\Sigma$ متناظرة. وبما أن Σ موجبة محددة متناظرة، فتوجد مصفوفة مثلثة T بحيث يكون $T'\Sigma T = I$ أو $\Sigma = T'^{-1}\, T'^{-1}$ وإذا رمزنا للمصفوفة T'^{-1} بالرمز P فيمكن التعبير عن Σ على الشكل $\Sigma = PP'$. وهكذا نكتب.

$$\left| I-2it\, G\Sigma \right| = \left| I-2it\, G\, PP' \right|$$

ويمكن بسهولة تبيان أن $\left| I\text{-}AB \right| = \left| I\text{-}BA \right|$ ، وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.

وهذا يسمح بكتابة :

$$\left| I\text{-}2it\, G\Sigma \right| = \left| I-2it\, G\, PP' \right| = \left| I-2it\, P'\, GP \right|$$

والمصفوفة $P'GP$ متناظرة وبالتالي توجد مصفوفة متعامدة U بحيث يكون :

$$U'(P'GP)\, U = D\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \qquad (٣, ٣)$$

حيث λ_j ، $j = 1,\ldots,m$ الجذور المميزة للمصفوفة $P'GP$ (ويمكن بسهولة تبيان أن هذه الجذور هي في الوقت نفسه الجذور المميزة لِ $G\Sigma$ وقد تركنا ذلك تمرين للطالب).

ومن (٣,٣) نجد بوضوح أن $P'GP = UDU'$ وبالتالي لدينا.

$$\left| I-2it\, G\Sigma \right| = \left| I-2it\, UDU' \right| = \left| I-2it\, U'UD \right| = \left| I-2it\, D \right| \qquad (٣, ٤)$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (1-2it\, \lambda_j)$$

متذكرين أن $\phi_{\chi^2(1)}(t) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$ ، لدينا الآن :

$$\phi_Q(t) = \prod_{j=1}^{m} (1-2i\lambda_j\, t)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{m} \phi_{\lambda j \chi_j^2(1)}(t) = \phi_{\Sigma\lambda_j \chi_j^2(1)}(t) \qquad (٣, ٥)$$

وهذا يعني أن :

$$Q = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \chi_j^2\,(1) \qquad (٣, ٦)$$

حيث $\chi_j^2\,(1)$ ، $j = 1,\ldots,m$ هي m من متغيرات χ^2 المستقلة كل منها بدرجة واحدة

من الحرية.

نظرية (٢): لنفترض أن المتجه $\underline{Y}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$، حيث Σ مصفوفة متناظرة موجبة محددة $m \times m$ وبالتالي يمكن التعبير عنها على الشكل $\Sigma = PP'$ ، P غير شاذة. لنعتبر الصيغة التربيعية $Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})'\, G\, (\underline{Y} - \underline{\mu})$ فالشرط اللازم والكافي كي

يتوزع Q وفق التوزيع $\chi^2(r)$ هو أن تكون المصفوفة $P'\,GP$ أو ΣG أو $G\Sigma$ متساوية القوى ورتبتها r.

برهان:

(أ) لزوم الشرط. إذا كان $Q = \chi^2\,(r)$ فنعلم من خواص التوزيع χ^2 أنه يمكن كتابة :

$$Q = \chi_1^2(1) + \chi_2^2(1) + \ldots + \chi_r^2(1) + 0\,\chi_{r+1}^2(1) + \ldots + 0\,\chi_m^2(1)$$

وبما أن شروط النظرية (١) السابقة تنطبق، فمقارنة هذه العبارة مع العبارة (١ , ٣) المطابقة لها تسمح لنا بكتابة :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 1 \quad ; \quad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0$$

(بالطبع يمكن أن تقع الجذور المساوية للواحد وتلك المساوية للصفر في أي ترتيب آخر).

وبما أن $P'GP$ متناظرة فهي وفقا للنظرية (٢) من الفقرة (١٥, ١) متساوية القوى ومن الواضح أن رتبتها r.

$$P'G\,(PP')\,G\,P = P'GP$$

وبضرب الطرفين من اليسار بـ P ومن اليمين بـ P^{-1} نجد :

$$\Sigma\, G\, \Sigma\, G = \Sigma\, G \qquad (٣, ٧)$$

أي أن ΣG بدورها متساوية القوى، وفضلا عن ذلك فإن رتبتها r، ذلك لأن :

$$r(\Sigma G) = r(PP'G) = r(P'GP) = r \qquad (٣, ٨)$$

وبصورة مماثلة يمكن تبيان أن $G\Sigma$ متساوية القوى ورتبتها r.

(ب) كفاية الشرط. إذا كانت $P'GP$ أو ΣG أو $G\Sigma$ متساوية القوى ورتبتها r، فعندئذ لها r من الجذور المميزة المساوية للواحد و$m\text{-}r$ من الجذور المساوية للصفر، ودون انتقاص من عمومية البرهان يمكن كتابته :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 1, \quad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0$$

وباستخدام (٦ , ٣) نجد :

$$Q = \chi_1^2(1) + \chi_2^2(1) + ... + \chi_r^2(1) + 0\,\chi_{r+1}^2(1) + ... + 0\,\chi_m^2(1)$$

أو :

$$Q = \chi^2(r) \qquad (٣, ٩)$$

نتيجة (١): في الحالة الخاصة $\Sigma = \sigma^2 I$ تصبح عبارة النظرية (٢) كما يلي :

الشرط اللازم والكافي كي يتوزع $\frac{Q}{\sigma^2} = (\underline{Y} - \underline{\mu})' \frac{G}{\sigma^2} (\underline{Y} - \underline{\mu})$ وفق التوزيع $\chi^2(r)$ هو أن تكون G متساوية القوى ورتبتها r.

وفي الحالة الأخص حيث $\underline{\mu} = \underline{0}$ و$\sigma^2 = 1$ فإن الشرط واللازم والكافي كي يتوزع $Q = \underline{y}' G\, \underline{y}$ وفق $\chi^2(r)$ هو أن تكون G متساوية القوى ورتبتها r.

والنظرية التالية تمثل تعميما لهذه النتيجة إلى الحالة التي يكون فيها $\underline{\mu} \neq \underline{0}$.

نظرية (٣): ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ حيث Σ موجبة محددة فعندئذ تتوزع الصيغة التربيعية $Q = \underline{Y}' G\, \underline{Y}$ وفق توزيع كاي مربع اللامركزي $\chi^2(r; \lambda)$

بمعلمة لا مركزية $\lambda = \frac{1}{2} \underline{\mu}' G\, \underline{\mu}$ إذا، وفقط إذا، كانت $G\Sigma$ أو ΣG متساوية القوى ورتبتها r.

(٣, ٢) استقلال صيغتين تربيعيتين

نظرية (٤): **(نظرية كراي Craig)**: ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ حيث Σ موجبة محددة. ولتكن الصيغتان التربيعيتان.

$$Q_j = (\underline{Y} - \underline{\mu})' A_j (\underline{Y} - \underline{\mu}) \quad , \quad j = 1, 2 \qquad (٣, ١٠)$$

حيث A_1، A_2 أي مصفوفتين حقيقيتين متناظرتين. فالشرط اللازم والكافي لاستقلال Q_1 وQ_2 إحصائيا هو أن يكون $A_1 \Sigma A_2 = 0$.

برهان*: نعلم أن الشرط اللازم والكافي لاستقلال Q_1 وQ_2 هو :

$$\phi_{\underline{Q}}(\underline{t})=\phi_{Q_1,Q_2}(t_1,t_2)=\phi_{Q_1}(t_1)\ \phi_{Q_2}(t_2) \qquad (٣,١١)$$

ونعلم من (٣, ٢) أن:

$$\phi_{Q_j}(t_j)=\left|I_m-2it_j\,\Sigma A_j\right|^{-\frac{1}{2}}$$

وهكذا يصبح الشرط (٣, ١١):

$$\phi_{\underline{Q}}(\underline{t})=E(e^{it_1Q_1+it_2Q_2})$$

$$\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}}\int_{R_m} exp\Big[it_1(\underline{y}-\underline{\mu})'A_1(\underline{y}-\underline{\mu})+it_2(\underline{y}-\underline{\mu})'A_2(\underline{y}-\underline{\mu})$$

$$-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})\Big]d\underline{y}$$

$$=\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{\left|\Sigma^{-1}-2it_1A_1-2it_2A_2\right|}=\left|I_m\,2it_1\Sigma A_1-2it_2\Sigma A_2\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (٣,١٢)$$

كما نلاحظ أن:

$$\phi_{Q_1}(t_1)\,\phi_{Q_2}(t_2)=\left|I_m-2it_1\Sigma A_1-2it_2\Sigma A_2-4t_1t_2\,\Sigma A_1\Sigma A_2\right|^{\frac{1}{2}}$$

(أ) شرط الكفاية. إذا كان $A_1\,\Sigma\,A_2=0$، فعندئذ:

$$\phi_{Q_1}(t_1)\phi_{Q_2}(t_2)=\left|I_m-2it_1\Sigma A_1-2it_2\Sigma A_2\right|^{-\frac{1}{2}}=\phi_{Q_1,Q_2}(t_1,t_2)$$

أي أن Q_1 وQ_2 مستقلان.

(ب) لزوم الشرط. لنفترض أن Q_1 وQ_2 مستقلان أي أن:

$$|I_m-2it_1\,\Sigma A_1-2it_2\,\Sigma A_2|=|I_m-2it_1\,\Sigma A_1|\,|I_m-2it_2\,\Sigma A_2| \qquad (٣,١٣)$$

ونرغب في تبيان أن هذا يتضمن كون $A_1\,\Sigma\,A_2=0$، لنضع:

$$2it_j=\frac{\tau_j}{\lambda}\quad,\qquad j=1,2 \qquad (٣,١٤)$$

ولنضع $\Sigma=PP'$ ويكن:

$$H_j=P'\,A_j\,P \qquad (٣,١٥)$$

فعندئذ يمكن كتابة (٣, ١٥) بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}|I_m - 2it_1 PP' A_1 - 2it_2 PP'A_2| &= |I_m - 2it_1 PP' A_1|\,|I_m - 2it_2 PP' A_2| \\ &= |P^{-1}|\,|I_m - 2it_1 PP' A_1|\,|P| . |P^{-1}|\,|I_m - 2it_2 PP' A_2|\,|P| \\ &= |P^{-1}P - 2it_1 P^{-1} PP' A_1 P|\,|P^{-1} P - 2it_2 P^{-1}PP' A_2 P|\end{aligned}$$

ويضرب الطرف الأيسر بـ $|P^{-1}|$ و $|P|$ حسب الحاجة يمكن كتابة :

$$\left|I_m - \frac{\tau_1}{\lambda} H_1 - \frac{\tau_2}{\lambda} H_2\right| = \left|I_m - \frac{\tau_1}{\lambda} H_1\right|\left|I_m - \frac{\tau_2}{\lambda} H_2\right| \tag{٣, ١٦}$$

وبالضرب بـ λ^{2m} نجد :

$$\lambda^m |\lambda I_m - \tau_1 H_1 - \tau_2 H_2| = |\lambda I_m - \tau_1 H_1|\,|\lambda I_m - \tau_2 H_2| \tag{٣, ١٧}$$

وبما أن $H_1 = P'A_1P$ متناظرة فيمكن إيجاد مصفوفة متعامدة U بحيث يكون :

$$U'H_1U = C = D(c_1, c_2, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0)$$

حيث $r = r(H_1) = r(A_1)$، لنعرّف الآن G على الشكل $G = U'H_2U$ وبالتالي تصبح (٣, ١٧) على الشكل :

$$\lambda_m |\lambda I_m - \tau_1 C - \tau_2 G|\,|\lambda I_m - \tau_1 C|\,|\lambda I_m - \tau_2 G| \tag{٣, ١٨}$$

ونجزئ الآن C و G بصورة مماثلة فنكتب :

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & m-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad , \quad G = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & m-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

لاحظ أن $C_{11} = D(c_1, \ldots, c_r)$. والمصفوفة المتناظرة التي ورد محددها في الطرف الأيسر من (٣ , ١٨) هي من الشكل :

$$\begin{bmatrix} \lambda - \tau_1 c_1 - \tau_2 g_{11} & -\tau_2 g_{12} & \cdots & -\tau_2 g_{1r} & & & \\ -\tau_2 g_{21} & \lambda - \tau_1 c_2 - \tau_2 g_{22} & \cdots & -\tau_2 g_{2r} & & -\tau_2 G_{12} & \\ \vdots & & & & & & \\ -\tau_2 g_{r1} & -\tau_2 g_{r2} & \cdots & \lambda - \tau_1 c_r - \tau_2 g_{rr} & & & \\ -\tau_2 G_{21} & & & & \lambda - \tau_2 g_{r+1,r+1} & \cdots & -\tau_2 g_{r+1,m} \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & -\tau_2 g_{r+1,m} & \cdots & \lambda - \tau_2 g_{mm} \end{bmatrix}$$

وسنرمز لها اختصارا على الشكل:

$$E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

وبما أن $|E|=|E_{22}||E_{11}-E_{12}E_{22}^{-1}E_{21}|$ وباستخدام الرمز المختصر $B=(b_{ij})$ ليدل على الجداء $E_{12}E_{22}^{-1}E_{21}$ نجد:

$$|E|=|\lambda I_{m-r}-\tau_2 G_{22}|\,|E_{11}-B_{11}| \qquad (٣,١٩)$$

ولكن:

$$E_{11}-B_{11}=\begin{bmatrix} \lambda-\tau_1c_1-\tau_2g_{11}-b_{11} & -\tau_2g_{21}-b_{21} & \cdots & -\tau_2g_{1r}-b_{1r} \\ -\tau_2g_{21}-b_{21} & \lambda-\tau_1c_2-\tau_2g_{22}-b_{22} & \cdots & -\tau_2g_{2r}-b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\tau_2g_{r1}-b_{r1} & -\tau_2g_{r2}-b_{r2} & \cdots & \lambda-\tau_1c_r-\tau_2g_{rr}-b_{rr} \end{bmatrix}$$

والحد الوحيد الذي يحوي τ_1 مرفوعا إلى القوة r في $|E_{11}-B_{11}|$ هو جداء العناصر القطرية (وهو حد واحد من مجموعة الحدود التي تعرّف المحدد) ومن الواضح أن معامل τ_1^r في هـذا الجداء هو $(-1)^r c_1c_2\ldots c_r$. وبالتالي يكون τ_1^r معامل في الطرف الأيسر من (٣,١٨)، آخذين في الاعتبار (٣,١٩) هو:

$$\lambda^m(-1)^r c_1 \ldots c_r|\lambda I_{m-r}-\tau_2 G_{22}| \qquad (٣,٢٠)$$

ولكن τ_1 تظهر في العامل الأول فقط من الطرف الأيمن من (٣,١٨) ونقصد $|\lambda I_m-\tau_1 C|$ وهذه المصفوفة بالتفصيل هي:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ m-r \end{array}\left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda-\tau_1c_1 & \cdots & O & & \\ \vdots & & & & O \\ O & \cdots & \lambda-\tau_1c_r & & \\ \hline & & & \lambda & O \\ & O & & & \ddots \\ & & & O & \lambda \end{array}\right]$$

(الأعمدة: r ، $m-r$)

أي أن معامل τ_1^r في الطرف الأيمن من (٣,١٨) هو:

$$\lambda^{m-r} c_1 \ldots c_r (-1)^r \; | \lambda I_m - \tau_2 G | \qquad (٣, ٢١)$$

وبمساواة (٢٠ ، ٣) و (٢١ ، ٣) نجد :

$$\lambda_m (-1)^r c_1 \ldots c_r | \lambda I_{m-r} - \tau_2 G_{22} | = \lambda^{m-r} c_1 \ldots c_r (-1)^r | \lambda I_m - \tau_2 G |$$

أو :

$$\lambda^r | \lambda I_{m-r} - \tau_2 G_{22} | = | \lambda I_m - \tau_2 G | \qquad (٣, ٢٢)$$

وتعني هذه المعادلة أن للمصفوفتين G وG_{22} الجذور المميزة نفسها وبالتالي فإن مجموع مربعات عناصر G ومجموع مربعات عناصر G_{22} متساويان باعتبار أن كلا منهما يساوي مجموع مربعات الجذور المميزة، وبالتالي لدينا :

$$G_{11} = 0 , \quad G_{12} = 0, \quad G_{21} = 0$$

ومتذكرين أن $C_{12} = 0$ ، $C_{21} = 0$ ، $C_{22} = 0$ ، فهذا يعني أن :

$$CG = \begin{pmatrix} C_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

لدينا الآن :

$$CG = U' H_1 UU' H_2 U = 0$$

وبما أن U متعامدة فلدينا :

$$U' P' A_1 PP' A_2 PU = 0$$

ولكن P ، P' ، وU مصفوفات غير شاذة ، مما يعني أخيرا أن :

$$A_1 \Sigma A_2 = 0$$

نتيجة (٢): ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$. نقول إن الصيغة التربيعية $Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})' A (\underline{Y} - \underline{\mu})$ ، حيث A مصفوفة متناظرة، والتركيب الخطي $Z = b' (\underline{Y} - \underline{\mu})$ حيث $\underline{b}$ متجه من الثوابت، مستقلان إذا وفقط إذا كان $\underline{b}' \Sigma A = \underline{0}'$.

(البرهان متروك كتمرين للطالب).

صيغة أخرى لاستقلال صيغة تربيعية وتركيب خطي.

نظرية (٥): ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, I)$، ولتكن B مصفوفة $q\times m$ من الثوابت، فيكون المتجه $B\underline{Y}$ مستقلا عن الصيغة التربيعية $\underline{Y}'\ A\ \underline{Y}$ إذا كان $BA = 0$.

نظرية (٦): ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$، حيث Σ مصفوفة $m\times m$ رتبتها m، إذا كان $B\Sigma A = 0$ فتكون الصيغة التربيعية $\underline{Y}'A\underline{Y}$ مستقلة عن المتجه $B\underline{Y}$ حيث B مصفوفة $q\times m$ من الثوابت.

(٣ , ٣) نظرية كوكران

تمهيد (١): لنفترض أن المصفوفة M متناظرة ومتساوية القوى وP مصفوفة متناظرة وموجبة نصف محددة. إذا كانت $I_m\text{-}M\text{-}P$ موجبة نصف محددة أيضاً فعندئذ $MP = PM = 0$ (جميع المصفوفات المذكورة من المرتبة نفسها $m\times m$).

برهان*: لنفترض أن $\underline{x}$ متجه ما وليكن $\underline{y} = M\underline{x}$، فعندئذ:

$$\underline{y}'\ M\ \underline{y} = \underline{y}'\ MM\ \underline{x} = \underline{y}'\ M\ \underline{x} = \underline{y}'\ \underline{y} \qquad (٣, ٢٣)$$

ومنه نجد أن:

$$\underline{y}'(I_m - M - P)\underline{y} = -\ \underline{y}'\ P\ \underline{y} \qquad (٣, ٢٤)$$

ولكن $I_m\ \text{-}M\ \text{-}\ P$ وP كلتاهما موجبة نصف محددة بالفرض وبالتالي فالطرف الأيمن غير سالب والطرف الأيمن غير موجب وهذا يعني أن $\underline{y}'P\underline{y} = 0$. وكما نعلم يمكن التعبير عن P على الشكل $P = L'L$ وبالتالي $\underline{y}'P\underline{y} = \underline{y}'L'L\underline{y} = 0$ وهذا يتضمن كون $L\underline{y} = 0$ أو $L'\ L\underline{y} = 0$ وهذه بدورها تفصح عن أن $P\underline{y} = P\ M\underline{x} = 0$ وهذا صحيح أيا كان المتجه $\underline{x}$ مما يعني بدوره أن $PM = 0$.

نظرية (٧): (جريبل ومارساجليا): إذا كانت D_1، ...، D_q مصفوفات $m\times m$ متناظرة وكان:

(أ) كل من D_1، ...، D_q متساوية القوى.

(ب) $D = D_1 + ... + D_q$ متساوية القوى.

فعندئذ:

(ج) $D_i D_j = 0$، لكل $i \neq j$.

وفضلا عن ذلك فإن تحقق أي شرطين من الشروط (أ)، (ب) و(ج) يؤدي إلى تحقق الشرط الثالث الباقي.

برهان*: إذا صح الشرط (ب) فتكون $I - D$ متساوية القوى وبالتالي موجبة نصف محددة (جميع جذورها المميزة إما 0 أو 1) وإذا صح الشرط (أ) أيضا فعندئذ تكون المصفوفة:

$$D - D_i - D_j = \sum_{t \neq i,j} D_t$$

موجبة نصف محددة (مجموع صيغ تربيعية غير سالبة هو صيغة تربيعية غير سالبة). وهذا يعني أن تحقق (أ) و(ب) يعني أن $I - D + D - D_i - D_j = I - D_i - D_j$ مصفوفة موجبة نصف محددة. وبتطبيق نتائج التمهيد (١) على $I - D_i - D_j$ نجد أن $D_i D_j = 0$ وهكذا يؤدي الشرطان (أ) و(ب) إلى الشرط (ج).

وإذا تحقق الشرطان (أ) و(ج) فلدينا:

$$DD = \sum_{i=1}^{m} D_i D_i + \sum_{i \neq j}^{m} D_i D_j = \sum_{i=1}^{m} D_i D_i = \sum_{i=1}^{m} D_i = D$$

وبالتالي يتحقق الشرط (ب).

لنفترض الآن تحقق الشرطين (ب) و(ج) وليكن d متجه مميز وα الجذر المميز الموافق لمصفوفة D_j، $j = 1,...,m$، بحيث يكون:

$$D_j \underline{d} = \alpha \underline{d}$$

ومن أجل $\alpha \neq 0$ لدينا $\underline{d} = \frac{1}{\alpha} D_j \underline{d}$ وباستخدام (ج) يمكن كتابة:

لكل $i \neq j$ $\quad D_i \underline{d} = \frac{1}{\alpha} D_i d_j \underline{d} = 0$

وبالتالي: $\quad D \underline{d} = \sum_{i \neq j} D_i \underline{d} + D_j \underline{d} = D_j \underline{d} = D_j \underline{d} = \alpha \underline{d}$

أي أن d متجه مميز لِ D ومن الشرط (ب) يكون α إما 0 أو 1، وبالتالي تكون D_j، وهي متناظرة بالفرض، مصفوفة متساوية القوى. أي أن تحقق الشرط (ب) و(ج) يؤدي إلى تحقق (أ).

نظرية (٨): **(نظرية كوكران)**: لنفترض أن المتجه $\underline{Y}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{0}, I_m)$. لنفترض أيضا أن:

$$Q = \underline{Y}' \underline{Y} = Q_1 + \ldots + Q_k \tag{٣, ٢٥}$$

حيث $Q_t = \underline{Y}' A_t \underline{Y}$ صيغة تربيعية رتبتها n_t، أي أن $r(A_t) = n_t$ حيث A_t مصفوفة متناظرة $m \times m$، $t = 1, \ldots, k$، فعندئذ يؤدي تحقق أي من الشروط الثلاثة التالية إلى تحقق الشرطين الآخرين:

(أ) Q_1، ...، Q_k مستقلة إحصائيا.

(ب) يتوزع كل من Q_1، ...، Q_k وفق التوزيع χ^2.

(ج) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m$.

برهان*: سنبرهن النظرية بتبيان أن الشرط (أ) يتضمن (ب) وأن الشرط (ب) يتضمن (ج) ثم إن الشرط (ج) يتضمن (أ).

أولاً: لنفترض أن الشرط (أ) محقق فعندئذ تكون Q_1 مستقلة عن $Q_2 + \ldots + Q_k$، والآن:

$$\underline{y}' \underline{y} = \underline{y}' (A_1 + \ldots + A_k) \underline{y} \tag{٣, ٢٦}$$

أي أن $I_m = A_1 + \ldots + A_k$. لتكن $B = A_2 + \ldots + A_k$ فلدينا بالفرض أن $\underline{y}'B\underline{y}$ مستقلة عن $Q_1 = \underline{y}'A_1\underline{y}$ ومن النظرية (٤) يكون $A_1 B = 0$، ولكن $A_1 + B = I_m$، أي أن $A_1 (I - A_1) = 0$ أو $A_1 = A_1 A_1$ والمصفوفة A_1 متساوية القوى، وإذا كانت A_1 متساوية القوى فإن Q_1 تتوزع وفق التوزيع $\chi^2(n_1)$ حيث $n_1 = r(A_1) = tr(A_1)$، وذلك بالاستفاد من النظرية (٢). وبصورة مماثلة يمكن تبيان أن أي Q_j، $j = 1,\ldots,k$ تتوزع وفق $\chi^2(n_j)$. والشرط (أ) يتضمن الشرط (ب).

ثانياً: لنفترض صحة الشرط (ب) عندئذ، وبالاستفاد من النظرية ٢ أيضا، نجد أن A_j متساوية القوى، $j = 1,\ldots,k$، و$tr(A_j) = r(A_j)$، ولكن $I_m = A_1 + \ldots + A_k$ أي أن $tr(I_m) = tr(A_1 + \ldots + A_k) = \sum_{t=1}^{k} tr(A_t)$ وبالتالي $m = n_1 + \ldots + n_k$. والشرط (ب) يتضمن الشرط (ج).

ثالثاً: لنفترض أن $n_1 + \ldots + n_k = m$، لدينا :

$$A_1 + B = I_m \quad , \quad B = A_2 + \ldots + A_k \tag{٣, ٢٧}$$

وبالتالي :

$$r(B) = r(A_2 + \ldots + A_k) \le r(A_2) + \ldots + r(A_k) = n_2 + \ldots + n_k = m - n_1 \tag{٣, ٢٨}$$

وبما أن A_1 متناظرة فتوجد مصفوفة متعامدة P بحيث يكون :

$$P'A_1 P = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, 0, \ldots, 0)$$

حيث α_1، ...، α_{n_1} الجذور المميزة غير المساوية للصفر للمصفوفة A_1. ولدينا من (٣, ٢٧):

$$P'A_1 P + P'BP = P'IP = I \tag{٣, ٢٩}$$

أو :

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, 0, \ldots, 0) + P'BP = D(1, \ldots, 1)$$

وهذا يعني أن $P'BP$ مصفوفة قطرية وأن :

$$D(\alpha_1,...,\alpha_{n_1},0,...,0)+D(\beta_1,...,\beta_{n_1},\beta_{n_1+1},...,\beta_m)=D(1,...,1)$$

أي أن $\beta_{n_1+1}=...=\beta_m=1$. ومن (٣, ٢٨) نعلم أن $r(B)\leq m\text{-}n_1$ مما يعني بدوره أن $\beta_1=...=\beta_{n_1}==1$ وبالتالي $\alpha_1=...=\alpha_{n_1}=1$. وبما أن A_1 متناظرة بالفرض وجذورها المميزة إما 0 أو 1 فهي متساوية القوى. وبصورة مماثلة ، A_j متساوية القوى أيا كانت j=2,...,m . والآن $A_1+...+A_k=I$ متساوية القوى ، ووفقا للنظرية ٧ يكون $A_i\,A_j=0$ لكل $i\neq j$ ووفقا للنظرية(٤) تكون Q_i مستقلة عن Q_j لكل $i\neq j$، والشرط (ج) يتضمن الشرط (أ).

صيغة أخرى لنظرية كوكران.

نظرية (٩): ليكن توزيع المتجه $\underline{Y}$ هو التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu},\sigma^2I_m)$ وليكن $\sum_{i=1}^{k}\underline{Y}'A_i\underline{Y}=\underline{Y}'\underline{Y}$ حيث رتبة A_i هي n_i، $i=1,...,k$. فأي شرط من الشروط الثلاثة التالية :

١ - A_i متساوية القوى لكل i.

٢ - $A_i\,A_j=0$ لكل $i\neq j$.

٣- $\sum_{1}^{k}n_i=n$.

هو شرط لازم وكاف لصحة العبارتين التاليتين :

١ - تتوزع كل صيغة تربيعية $\underline{Y}'A_i\underline{Y}/\sigma^2$ ، $i=1,...,k$ ، وفق توزيع كاي مربع اللامركزي $\chi^2(n_i,\lambda_i)$ حيث $\lambda_i=\underline{\mu}'A_i\underline{\mu}/2\sigma^2$.

٢ - $\underline{Y}'A_i\underline{Y}$ و $\underline{Y}'A_jY$ مستقلتان لكل $i\neq j$.

نظرية (١٠): ليكن $\underline{X}$ متجها عشوائيا $n\times1$ توقعه $E(\underline{X})=\underline{\mu}$ ومصفوفة التباين والتغاير هي $Cov(\underline{X})=\Sigma$ ، حيث $(\Sigma)_{ij}=\sigma_{ij}$ ، فعندئذ :

$$E(\underline{X}'\,A\underline{X}) = tr(A\Sigma) + \underline{\mu}'A\,\underline{\mu} \qquad (٣,٣٠)$$

برهان: نعلم أن $\underline{x}'\,A\underline{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,x_j$ ، و $E(X_i\,X_j) = \sigma_{ij} + \mu_i\,\mu_j$ ، وبالتالي :

$$E(\underline{X}'\,A\underline{X})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,E(X_i\,X_j)=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}a_{ij}\,(\sigma_{ij}+\mu_i\,\mu_j)$$

$$=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}a_{ij}\,\sigma_{ij}+\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}a_{ij}\,\mu_i\,\mu_j=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}a_{ij}\,\sigma_{ji}+\underline{\mu}'A\,\underline{\mu}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(A\Sigma)_{ii}+\underline{\mu}'A\,\underline{\mu}=tr(A\Sigma)+\underline{\mu}'A\,\underline{\mu}$$

نظرية (١١): لتكن X_1 ، X_2 ، ... ، X_n متغيرات عشوائية مستقلة حيث $E(X_i) = \theta_i$ ، $V(X_i) = \mu_2$ لكل i ، والعزوم المركزية $E(X_i - \theta_i)^r = \mu_r$ موجودة من أجل $r = 2,3,4$ و A مصفوفة $n\times n$ متناظرة، ولنرمز بالرمز $\underline{a}$ لمتجه عناصرها القطرية أي $\underline{a}' = (a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$. فعندئذ.

$$Var(\underline{X}'\,A\underline{X})=(\mu_4-3\mu_2^2)\,\underline{a}'\,\underline{a}+2\mu_2^2\,tr(A^2)+4\,\mu_2\,\underline{\theta}'\,A^2\underline{\theta}+4\,\mu_3\,\underline{\theta}'\,A\underline{a} \qquad (٣,٣١)$$

برهان*: $Var(\underline{X}'A\,X) = E(\underline{X}'A\underline{X})^2 - [E(\underline{X}'A\underline{X})]^2$. لدينا :

$$\underline{x}'A\underline{x} = (\underline{x} - \underline{\theta})'\,A\,(\underline{x} - \underline{\theta}) + 2\,\underline{\theta}'A\underline{x} - \underline{\theta}'A\,\underline{\theta} = (\underline{x} - \underline{\theta})'\,A\,(\underline{x} - \underline{\theta})$$
$$+ 2\,\underline{\theta}'A(\underline{x} - \underline{\theta}) + \underline{\theta}'A\,\underline{\theta} = \underline{y}'A\underline{y} + 2\,\underline{\theta}'A\,\underline{y} + \underline{\theta}'A\underline{\theta}$$
$$= \underline{y}'A\,\underline{y} + 2\,\underline{b}'\,\underline{y} + \underline{\theta}'\,A\,\underline{\theta}$$

حيث $\underline{Y} = \underline{X} - \underline{\theta}$. وبما أن $E(\underline{Y}) = 0$ فنجد :

$$E(\underline{X}'AX\underline{x})^2 = E(\underline{Y}'\,A\underline{Y})^2 + 4E(b'\underline{Y})^2 + (\underline{\theta}'A\,\underline{\theta})^2 + 2\underline{\theta}'A\,\underline{\theta}\,E[\underline{Y}'\,A\underline{Y} + 2\,\underline{b}'\underline{Y}]$$
$$+ 4E[b'\,\underline{Y}\,\underline{Y}'\,A\,Y]$$

وبملاحظة أن :

$$E(Y_iY_jY_kY_t)=\begin{cases}\mu_4\,,\ i=j=k=t\\ \mu_2\,,\ i=j,k=t,i=k,j=t,i=t,j=k\\ 0;\ otherwise\end{cases}$$

يمكننا كتابة ما يلي :

$$E(\underline{Y}'A\underline{Y})^2 = \Sigma_i\,\Sigma_j\,\Sigma_k\,\Sigma_t\,a_{ij}\,a_{kt}\,E(Y_i\,Y_j\,Y_k\,Y_t)$$

$$= \mu_4 \sum_i^n a_{ii}^2 + \mu_2^2 \left[\sum_{j \neq k} a_{ii}\, a_{kk} + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}\, a_{ji} \right]$$

$$= \mu_4 \sum_i a_{ii}^2 + \mu_2^2 \left[\left(\sum_i a_{ii} \right)^2 - \sum_i a_{ii}^2 + \sum_i \sum_j a_{ij}^2 - \sum_i a_{ii}^2 + \sum_i \sum_j a_{ij}^2 - \sum_i a_{ii}^2 \right]$$

$$= \left(\mu_4 - 3\mu_2^2 \right) \sum_i a_{ii}^2 + \mu_2^2 \left[(trA)^2 + 2tr(A)^2 \right]$$

$$= \left(\mu_4 - 3\mu_2^2 \right) \underline{a}' \underline{a} + \mu_2^2 \left[(trA)^2 + 2tr(A)^2 \right]$$

$$E(\underline{b}' \underline{Y}) = \sum_i \sum_j b_i\, b_j\, E(Y_i\, Y_j) = \mu_2\, \Sigma b_i^2 = \mu_2\, \underline{b}' \underline{b} = \mu_2\, \underline{\theta}' A^2\, \underline{\theta}$$

$$E(\underline{b}' \underline{Y}\, \underline{Y}' A Y) = E\left[\left(\sum_i b_i\, Y_i \right) \left(\sum_j \sum_k a_{ik}\, Y_j\, Y_k \right) \right] \sum_i \sum_j \sum_k b_i\, a_{jk}\, E(Y_i\, Y_j Y_k)$$

$$= \mu_3 \sum_i b_i\, a_{ii} = \mu_3\, \underline{b}' \mathrm{a} = \mu_3\, \underline{\theta}' A \mathrm{a}$$

وبما أن $[E(\underline{X}'\, A\underline{X})]^2 = [\mu_2\ tr\ A + \underline{\theta}'\ A\ \theta]^2$ فنجد أخيراً بعد التعويض والتبسيط أن :

$$Var[\underline{X}'\ AX] = \left(\mu_4 - 3\mu_2^2 \right) \underline{a}' \underline{a} + 2\mu_2^2\, tr(A^2) + 4\mu_2\, \underline{\theta}' A^2 \underline{\theta} + 4\mu_3\, \theta' A \mathrm{a}$$

وفي حالة توزيع طبيعي يكون $\mu_3 = 0$ ، $\mu_4 = 3\mu_2^2$ وتصبح العبارة :

$$Var(\underline{X}'\ A\underline{X})\, 2\mu_2^2\, tr(A^2) + 4\mu_2\, \underline{\theta}'\ A^2\, \underline{\theta} \qquad (٣, ٣٢)$$

وفي الحالة الخاصة $\mu_2 = \sigma^2$ و $\underline{\theta} = 0$ تصبح هذه العبارة الأخيرة :

$$Var(\underline{X}'\ A\underline{X}) = 2\sigma^4\, tr(A^2) \qquad (٣, ٣٣)$$

(٣, ٤) تمارين

١- يتوزع المتجه $\underline{Y}$ وفق التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$. استخدم النظرية (٢) لتبيّن أن توزيع $Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{\mu})$ هو $\chi^2(m)$.

٢- $\underline{Y}$ متجه يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ حيث $\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & & \dots & \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{\mu} = \mu 1m$ ، و1_m يرمز لمتجه $m\times 1$ جميع عناصره تساوي الواحد $1'_m = (1,1,\dots,1)$.

(أ) بيّن أنه يمكن كتابة $Q = (m-1)S_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2$ على الشكل:

$$Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})' M (\underline{Y} - \underline{\mu})$$

حيث $M = 1_m - \frac{1}{m} 1_m 1'_m$ وأنه يمكن كتابة Σ على الشكل:

$$\Sigma = \sigma^2 \left[(1-\rho) I_m + \rho 1_m 1'_m \right]$$

(ب) بيّن أن $Q = (1-\rho)\sigma^2 \chi^2 (m-1)$.

٣- لتكن A وB مصفوفتين $m\times n$ و$n\times m$، على الترتيب، بيّن أن:

$$|I_m - AB| = |I_n - BA|$$

٤- $\underline{Y}$ متجه يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ و$Q = (\underline{Y} - \underline{\mu})' A (\underline{Y} - \underline{\mu})$. ليكن $Z = \underline{b}' (\underline{Y} - \underline{\mu})$ حيث $\underline{b}' = (b_1,\dots,b_m)$ متجه من الثوابت. بيّن أن Q وZ مستقلان إذا، وفقط إذا، كان $\underline{b}'\Sigma A = 0$.

٥- ليكن $\underline{Y} \sim N_2(\underline{0}, I_2)$ ، (إشارة ~ تعني «يتوزع وفق»). بيّن أن $Y_1^2 + 2aY_1Y_2 + Y_2^2$ لا يمكن أن يكون مستقلا عن $Y_1^2 + 2bY_1Y_2 + Y_2^2$ إلا إذا كان $|a| = |b| = 1$ وa، b من إشارتين مختلفتين.

٦- ليكن $\underline{Y} \sim N_n(\gamma I_n, \sigma^2 I_n)$. بيّن أن $\overline{Y}$ و $\sum_{1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$ مستقلان. ما هو توزيع $\sqrt{n}\,(\overline{Y} - \gamma) / S_Y$.

٧- بيّن أن $Q_1 = n(\overline{Y} - \mu)^2$ مستقل عن $Q_2 = (n-1)S_Y^2$ حيث $\underline{Y} \sim N_n(\mu 1_n, \sigma^2 I_n)$ بيّن أن $Q_1/[Q_2/(n-1)] = F(1, n-1)$.

٨- $\underline{Y} \sim N_m(\underline{\mu}, \Sigma)$ ، بيّن أن $Q_1 = \underline{Y}' A_1 \underline{Y}$ و $Q_2 = (\underline{Y} - \underline{\mu})' A_2 (\underline{Y} - \underline{\mu})$ مستقلان إذا، وفقط إذا، كان $A_1 \Sigma A_2 = 0$.

٩- في النظرية (٩) إذا كان $\underline{\mu} = \underline{0}$ و $\Sigma = \sigma^2 I_n$ و A متساوية القوى رتبتها r، بيّن أن $E(\underline{Y}' A\ \underline{Y}) = r\sigma^2$.

١٠- إذا كانت X_1، ...، X_n مستقلة ولها التوزيع نفسه بمتوسط θ وتباين σ^2 أوجد $E(Q)$ حيث:

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_n)^2$$

١١- ليكن $\underline{X}$ متجها عشوائيا حيث $E(\underline{X}) = \theta\, 1_m$ و $Cov(\underline{X}) = \Sigma$، حيث $\sigma_{ii} = \sigma^2$ و $\sigma_{ij} = \rho\sigma^2$ ، $i \neq j$. بيّن أن $Q = \sum_1^n (X_i - \overline{X})^2$ تقدير غير منحاز لِ $\sigma^2(1-\rho)(n-1)$

١٢- لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ أوجد بتطبيق العلاقة (٣٫٣٢) $Var(S^2)$ حيث $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i^n (X_i - \overline{X})^2$.

١٣- لتكن Σ مصفوفة $m \times m$ متناظرة موجبة محددة فيمكن التعبير عنها كما نعلم بالشكل $\Sigma = PP'$، لتكن G أي مصفوفة $m \times m$ متناظرة بيّن أن ΣG و $P'GP$ لهما الجذور المميزة نفسها.

الفصل الرابع

نماذج إحصائية خطية

(٤,١) مقدمة

يشكل إيجاد واستنباط العلاقات بين متغيرات الكون المحيط بنا حجر الزاوية في سير الحضارة البشرية ، وأحد أهداف العلم هو اكتشاف علاقات بين ظواهر العالم الذي نعيشه وحوادثه ووصف هذه العلاقات والتنبؤ بها. وإحدى صور مثل هذا النشاط الإنساني هو الوصول إلى معادلة أو صيغة تربط بين مقادير كمية في عالمنا المعاش. فعلى سبيل المثال ، قد نهتم بعلاقة بين ضغط الدم لشخص معين وبين عمره ، أو العلاقة بين درجة الحرارة والضغط في عملية كيميائية بأحد مصانع البتروكيماويات في المملكة ، أو بين عدد العذوق (القنوان الدانية) على شجرة نخيل وبين كمية السماد التي خصصت لهذه الشجرة ، أو بين عدد السيارات التي تشغل طريقاً وبين تدفق الحركة المرورية على هذا الطريق في فترة معينة من النهار ، أو مدى تأثير طريق علاج معينة في شفاء العلّة أو المرض الذي نعالجه إلخ.

وسنتعرف في هذا الفصل أربعة أنواع من النماذج التي تتناول عدداً هائلاً من الظواهر المحيطة بنا ، اثنان منهما كميان وهما النموذج الخطي العام ، ونموذج الانحدار الخطي واثنان كيفيان (وصفيان) هما نموذج التصميم ، ونموذج مركبات التباين. وهذه النماذج على صلة بعضها ببعض وعند تحليل كل منها للقيام باستقراءات إحصائية

سنلمس قدراً كبيراً من التشابه. وللاستفادة من هذا التشابه سنعرّف أولا النموذج الخطي العام إذ يمكن النظر إلى النماذج الأخرى كحالات تندرج في إطار النموذج الخطي العام. وسنقتبس في بقية هذا الفصل بتصرف من كتاب النماذج الخطية لجريبل Graybill الفصل الخامس ذلك ؛ لأن معالجته لمفهوم النموذج الإحصائي معالجة متميزة وتتّسم بالدقة والوضوح.

(٤,٢) النموذج الخطي العام

يُكتب النموذج الخطي العام عادة وفق الصيغة :

$$Y = \mu(x) + \varepsilon \qquad (٤, ١)$$

ويُستخدم لتحديد قيمة Y بدءا من معرفة قيمة x المقابلة. ويمثل $\mu(x)$ دالة في متغير غير عشوائي x معرفة على ساحة D، أما Y وε فكلاهما متغير عشوائي. وبذلك يكون $\mu(x)$ الجزء الحتمي من النموذج بينما يمثل Y وε الجزئين العشوائيين. ونشير إلى Y كمتغير تابع أو متغير استجابة بينما نشير إلى x كمتغير مستقل أو متغير تنبؤ. لنفترض، على سبيل المثال، أن Y يمثل قياس ضغط الدم الانبساطي لشخص وأن x يمثل عمره، فعندئذ تمثل $\mu(x)$ قيمة التنبؤ لضغط الدم بدءا من معرفة العمر x، و$y - \mu(x)$ هو حيدان قياس فعلي لضغط الدم عن القيمة المتنبأ بها، ونرمز لهذا الحيدان بالرمز e وندعوه الخطأ. ونلاحظ بوضوح أنه لا يمكن مشاهدة ثم تسجيل قياس ε، ولكننا نعرض، كجزء من العبارة العامة للنموذج، شيئاً ما عن توزيع ε الاحتمالي. وبصورة عامة، يكون الشكل الدالي $\mu(x)$ معروفا ولكنه ينطوي على معالم مجهولة، وفي الحالة البسيطة حيث نفترض $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ لكل x من المجال المصاحب أو الساحة D للدالة μ، وβ_0، β_1 معلمتان مجهولتان معرفتان في فضاء معالم Ω_β. وغالبا ما يكون كل من β_0 وβ_1 أي عدد حقيقي. وهكذا نكتب النموذج وفق الصيغة.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (٤, ٢)$$

ووصف «الخطي» يعني أن الدالة $\mu(x)$ هي دالة خطية في المعالم غير المعروفة.

وبصورة عامة، يمكن أن تكون الدالة $\mu(x)$ دالة خطية في $k + 1$ من المعالم β_0، β_1، ...، β_k، كما يمكن كتابتها في واحد من أعمّ الصيغ لها على الشكل:

$$\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x) + \ldots + \beta_k q_k(x)$$

حيث $q_i(x)$، $i = 1,\ldots,k$، دالة معروفة في x ولا تتضمن أية معالم مجهولة. وفيما يلي بعض الأمثلة عن نماذج خطية.

(غير معلوم) $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0\ Var(\varepsilon) = \sigma^2$

(غير معلوم) $Y = \beta x + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0,\ Var(\varepsilon) = \sigma^2$ (٤, ٣)

σ^2 مجهول $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 e^x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$

حيث يعني الرمز ~ «يتوزع وفق» و N ترمز للتوزيع الطبيعي.

ويمكن أن يكون الجزء الحتمي $\mu(x)$ من النموذج دالة في أكثر من متغير واحد، فمثلا يمكن أن يكون النموذج:

$$Y = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) + \varepsilon \quad , E(\varepsilon) = 0 \quad (٤, ٤)$$

حيث $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p-1} x_i \beta_i$ ، أو بصورة أعم:

(غير معلوم) $Y = \beta x + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0,\ Var(\varepsilon) = \sigma^2$

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p-1} q_i(x_1, \ldots, x_{p-1})\, \beta_i \quad (٤, ٥)$$

حيث $q_i(x_1,\ldots,x_{p-1})$ دوال معروفة تماما ولا تتضمن معالم مجهولة. وكمثال، يمكن أن نكتب في حالة $p = 4$ النموذج:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0$$

هذه النماذج هي نماذج «مجتمع» والهدف، في جزء كبير منه، هو الحصول على قيم تقديرية للمعالم. وللقيام بذلك لا بد من الحصول على بعض المشاهدات من

المجتمعات التي تمثلها هذه النماذج وعلى سبيل المثال، إذا كان النموذج المعطى بالمعادلة (٤, ٢) هو النموذج الذي سنستخدمه للتنبؤ بضغط الدم عند شخص معين بعد معرفة عمره x فلا بد من الحصول على تقديرات لِـ β_0 وβ_1. وللقيام بذلك نعرف مجتمعا من الأفراد لكل عمر سيتناوله النموذج أو يتطرق إليه، ثم نحصل من بعض من هذه المجتمعات على قياسات ضغط الدم لعينة من الأفراد، وإذا افترضنا أن النموذج يصح فقط للأعمار 20، 25، 30، 35، ...، 75 عاما، فعندئذ تمثل هذه المجموعة من الأعمار الساحة D للدالة $\mu(x)$. وهناك مجتمع من قياسات الضغط عند كل عمر من هذه الأعمار. لنفترض أننا قررنا قياس ضغط الدم لفرد واحد نختاره عشوائيا من كل من المجتمعات الموافقة للأعمار $x_1 = 20$، $x_2 = 35$، $x_3 = 50$، $x_4 = 60$، $x_5 = 70$، $x_6 = 75$.

ولنرمز بالرمز Y_i لضغط الدم المشاهد عند الشخص الذي سنختاره عشوائيا من مجتمع قياسات الضغط عند العمر x_i، $i = 1,2,\ldots,6$. فتكون العينة من المشاهدات التي حصلنا عليها هي (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ...، (x_6, y_6) ومن خلال المعادلة (٢ , ٤) فإن هذه القياسات ترتبط وفق العلاقات:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\ ,\ E(\varepsilon_i) = 0,\ \ i = 1,2,\ldots,6 \qquad (٤, ٦)$$

وتدعى هذه المجموعة من العلاقات نموذج «عينة». ونستخدم هذه الأزواج الستة من الأعداد لحساب تقديرات للمعلمتين β_0 وβ_1 وأية مقادير أخرى نحتاج إلى تقديرها. والنقطة التي نريد إيضاحها هي أن النماذج في (٣ , ٤) و (٥ , ٤) هي نماذج مجتمعهم من حيث إنها تعرف علاقة فوق مجموعة D هي ساحة الدالة $\mu(x)$، وY متغير عشوائي له توزيع الاحتمالي $F_Y(y)$ يصف مجتمعا من القياسات Y وذلك لكل قيمة من قيم x في الساحة D. ولابد من الحصول على مجموعة من المشاهدات تتضمن n من أزواج

الأعداد (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) ، ... ، (x_n, y_n) ، ثم نستخدم هذه المشاهدات باستقراءات حول معالم النموذج.

تعريف (١): نموذج (عينة) خطي بسيط. لتكن المعادلات التالية وعدتها n :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \,,\; E(\varepsilon_i) = 0,\; i = 1,2,\ldots,n \qquad (٤, ٧)$$

حيث :

١ - المتغيرات Y_i متغيرات عشوائية قابلة للمشاهدة.

٢- المتغيرات x_i متغيرات غير عشوائية قابلة للمشاهدة وتنتمي إلى ساحة D.

٣- β_0 وβ_1 معلمتان مجهولتان معرفتان في فضاء معالم Ω_β.

٤- المتغيرات ε_i متغيرات عشوائية غير قابلة للمشاهدة بحيث إن $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij}$.

هذه الشروط تعرف نموذجا خطيا بسيطا.

وقبل التعميم إلى نموذج خطي عام نناقش بعضا مما ينطوي عليه هذا التعريف.

ملاحظة (١): كل قيمة من قيم x المشاهدة تحدد دالة توزيع ، أي أن x_1 يحدد دالة توزيع $F_1(\cdot)$ ولهذه الدالة متوسط $\beta_0 + \beta x_1$ وتباين σ_{11}. وسنأخذ من هذه الدالة عينة عشوائية حجمها 1 ، أي مشاهدة واحدة Y_1 ، ويتكرر هذا لكل من x_2 ، x_3 ، ... ، وx_n. ونمثل البيانات المشاهدة بالأزواج (x_1,Y_1) ، (x_2,Y_2) ، ... ، (x_n,Y_n) . وهذه القيم ترتبط بعضها مع بعض وفقا للمعادلة (٧ , ٤).

ملاحظة (٢): عبر الدراسة التي نستخدم فيها النموذج نعتبر المتغير x مثبتا عند القيم x_1 ، ... ، x_n وتفسير الاحتمالات التي تنطوي عليها الاستقراءات كتكرار نسبي على المدى الطويل ، هذا التفسير يتصل بتكرار معاينة القيم Y أي تكرار أخذ عينة القيم Y_1 ، ... ، Y_n من التوزيعات نفسها $F_i(\cdot)$ ، $i = 1,2,\ldots,n$.

وما ينبغي تذكره دائما هو أننا حالما نحدد n من قيم x فإن هذه بدورها تحدد n من دوال التوزيع $F_i(\cdot)$، $i = 1,2,\ldots,n$، وهذه الدوال هي الدوال الوحيدة التي تجري معاينتها، y_1 تمثل مشاهدة عينة من $F_1(\cdot)$، وتمثل y_2 مشاهدة عينة من $F_2(\cdot)$، وهكذا. وبالتالي سيكون الاستقراء الذي نقوم به من هذه المشاهدات استقراء لمعالم هذه الدوال فقط، إلا أننا نرغب في الواقع باستقراء معالم دالة $F_0(\cdot)$ مقابلة لقيمة x_0 لم تكن من بين قيم x التي اخترناها. وإذا كانت x_0 تنتمي إلى الساحة D فقد يفيدنا نموذج المجتمع أن بعضا من معالم دالة التوزيع $F_0(\cdot)$ التي لم نقم بمعاينتها تتطابق مع معالم دوال التوزيع التي قمنا بمعاينتها. وسنلقي المزيد من الضوء على هذه الأفكار من خلال الأمثلة.

ملاحظة (٣): يقتصر الشرط (٤) المذكور في التعريف على الإشارة إلى وجود تغاير بين Y_i و Y_j. وغالبا ما نضيف بعض الافتراضات حول الأخطاء العشوائية ε_i، إذ نفترض في غالب الأحيان، مثلا، أن الأخطاء ε_i متغيرات طبيعية مستقلة لها التباين σ^2_i نفسه.

ملاحظة (٤): من المهم في كل مسألة تعريف D وΩ_β، ساحة الدالة $\mu(\cdot)$ وفضاء المعالم β، على الترتيب وفي العديد من المسائل يشكل الفضاء الإقليدي E_2 فضاء المعالم لأنه يمكن أن يكون كل من β_0 وβ_1 أي عدد حقيقي. ولكن قد يكون واقعيا أن نفترض $\beta_0 = 0$ في بعض النماذج، أو أن نفترض $\beta_1 > 0$، أو نفترض شروطا أخرى بالنسبة للمعالم β. وغالبا ما تكون الساحة D فترة على محور السينات، أو مجموعة من الأعداد الصحيحة، وهكذا. والسبب وراء تعريف D هو أن النموذج $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ يمكن أن يشكل نموذجا جيدا في دراسة معينة في حالة قيم معينة للمتغير x، ولكنه ليس كذلك بالنسبة لمجموعة أكبر من قيم x أو لجميع قيم x.

ملاحظة (٥): من المهم أن نتمكن من مشاهدة أو قياس قيم x بدون خطأ، وعندما لا يكون الأمر كذلك ستتغير الحالة الاستقرائية بصورة جذرية، وسيتطلب الموقف فرض شروط أخرى إضافية على النموذج. وعندما يكون x متغيرا مستمرا مثل طول أو وزن، فمن المستحيل مشاهدة مقادير كهذه دون خطأ. ويشير هذا إلى صعوبة جدية في محاولة نمذجة العالم الواقعي المحيط بنا. ونكتفي هنا بالقول إنه عندما نستخدم النموذج الخطي العام في حالات كهذه فإن تباين القياسات x يجب أن يكون «صغيرا» بالمقارنة مع القيم المشاهدة للمتغير x، مما يسمح بافتراض أن قيم x هي أعداد مثبتة عمليا وتُقاس بدون خطأ.

تعريف (٢): **نموذج (عينة) خطي عام**. لتكن المعادلات التالية وعدتها n:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\, \beta_j + \varepsilon_i \ , E(\varepsilon_i) = 0 \ , \ i = 1,2,\dots,n \qquad (٤, ٨)$$

حيث:

١- المتغيرات Y_i متغيرات عشوائية قابلة للمشاهدة.

٢- المتغيرات x_{ij} متغيرات غير عشوائية قابلة للمشاهدة وتنتمي إلى ساحة D.

٣- β_j معالم مجهولة معرفة في فضاء معالم Ω_β.

٤- المتغيرات ε_i متغيرات عشوائية غير قابلة للمشاهدة بحيث إن $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i'}) = \sigma_{ii'}$. فتعرف هذه المواصفات نموذجا خطيا عاما.

وبما أننا سنستخدم المصفوفات عبر الكتاب فنعيد كتابة المعادلة (٨ , ٤) على الشكل:

$$\underline{Y} = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (٤, ٩)$$

حيث $\underline{Y}$ متجه $n\times1$ و$\underline{X}$ مصفوفة $n\times p$ و$\underline{\beta}$ متجه $p\times1$ و$\underline{\varepsilon}$ متجه $n\times1$ يحقق الشرطين $E(\varepsilon) = 0$ و$Cov(\varepsilon) = \Sigma$ ، وذلك بالمواصفات نفسها المذكورة آنفا لعناصر كل منها. وإذا أردنا كتابة المصفوفات والمتجهات الواردة في المعادلة (٩ , ٤) بالتفصيل نجد:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \tag{٤, ١٠}$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

لاحظ التعديل البسيط في مدى الدليل j لعناصر المتجه $\underline{\beta}$ وهي هنا من 1 إلى p بدلا من 0 إلى p-1. وكذلك الأمر بالنسبة للدليل الثاني في x_{ij} عناصر المصفوفة $\underline{X}$. وهي بهذا تصبح أكثر تناظرا. وسيتعرف القارئ بسهولة على الحالات الخاصة، فمثلا، إذا تضمّن النموذج β_0 يصبح العمود الأول في المصفوفة $\underline{X}$ متجهاجميع عناصره تساوي الواحد وعناصر المتجه $\underline{\beta}$ عندئذ ستكون β_0 ، β_1 ، ... ، β_{p-1}.

وفيما تبقى من هذه الفقرة نناقش كيف يمكن توليد مثل هذا النموذج في حالات من عالم الواقع الذي يحيط بنا ونقدم بعض الإرشادات التي تعين في إقامة النموذج أو بنائه.

لنفترض أن متغيرين x وz يقيسان ظاهرتين من ظواهر العالم المحيط بنا وتربطهما علاقة $q(x, z) = 0$. فقد يقول البعض إن هذا تجريد رياضي لا وجود له في عالم الواقع، ومع ذلك يبقى لمثل هذه العلاقات أهميتها البالغة، إذ لو لم تكن مثل هذه العلاقات دقيقة دقة تامة، فقد تمثل بصورة تقريبية ناجحة ما يجري بالفعل في عالم الواقع. وعلى سبيل المثال فإن الدائرة كما يعرفها علم الهندسة لا وجود لها، في الواقع، إلا في مخيلتنا

التي تختزن لها شكلاً من خلال تعريفها كمحل هندسي للنقاط التي تبعد مقدارا ثابتا عن نقطة ثابتة. وهناك علاقات رياضية تتعلق بمحيطها ومساحتها ومختلف خواصها، إلا أن أحداً لا يستطيع أن ينكر أهمية العجلة والدولاب التي تعتبر الدائرة الرياضية نموذجا لها، في حياتنا بأسرها.

لنأخذ مثلا العلاقة $s=\frac{1}{2}gt^2$ بين الزمن t والمسافة التي تقطعها نقطة مادية تسقط في فراغ بفعل الجاذبية الأرضية. ومن معرفة t يمكن تحديد المسافة. وكذلك الأمر في العلاقة بين مقاومة دائرة كهربائية وفرق الجهد بين قطبيها وشدة التيار الذي يسري فيها إلخ. ونجد في علاقات من هذا النوع $z = \mu(x)$ حالة خاصة جداً من النموذج (١ , ٤) ، حيث يصبح كل من متوسط ε وتباينه مساويا للصفر، ولا يتضمن النموذج عندئذ مركبة عشوائية وبالتالي فهو ليس نموذجا إحصائيا ولكنه نموذج رياضي. ومع ذلك فهناك حالات يصبح فيها مثل هذا النموذج الرياضي نموذجا إحصائيا. فلنفترض الحالة التي لا يمكن فيها مشاهدة المتغير z، وبدلا من مشاهدة z فإننا نشاهد في الواقع متغيرا Y حيث $Y = z + \varepsilon$، أي أن المتغير العشوائي Y يساوي القيمة الحقيقية للمتغير z مضافا إليها خطأ عشوائي ε. وبوضع $Y - \varepsilon$ بدلا من z نجد $Y = \mu(x) + \varepsilon$. وما نقول هنا هو أنه بالرغم من وجود علاقة دالية بين متغيرين z وx إلا أننا نجد من الضروري إقحامها في صيغة النموذج الإحصائي (١ , ٤) إذا كان قياس المتغير التابع ينطوي على خطأ قياس.

ومع وجود العلاقات الدالية في العديد من ميادين العلوم وفي طليعتها الفيزياء، إلا أنه توجد ميادين علمية أخرى مثل الأحياء، الاقتصاد، الأرصاد، إلخ حيث تكون العلاقات بين المتغيرات أكثر إبهاما وتعقيدا. وعلى سبيل المثال، نعلم أنه لا يمكن التنبؤ بالضبط بإنتاج القمح في قطعة من الأرض. هناك العديد من العوامل المؤثرة في هذا

الإنتاج، مما نعلمه، ولكن المعادلة التي تربط بين هذه العوامل والإنتاج غير معروفة. فكمية السماد المطبقة x ودرجة الحرارة x_1، ومعدل سقوط المطر x_2، ومقدار التعرض لأشعة الشمس x_3، وخصوبة التربة x_4، والعديد من العوامل الأخرى لها أثرها في الإنتاج z. ومع أن العوامل المؤثرة بمجملها غير معروفة لنا، والعلاقة التي تربط بين مختلف المتغيرات هنا غير معروفة، إلا أنه من المفيد في بناء نموذج أن نفترض أنه إذا علم الباحث جميع المتغيرات ذات الأثر، وكان قادرا على قياسها واحدا فآخر، وكان على علم بالعلاقة التي تربط بينها تماما، فسيكون قادرا على تحديد z من خلال صيغة $z = g(x, x_1,\ldots,x_k)$. وفي معظم الدراسات لا نستطيع حصر كافة العوامل المؤثرة ولكن غالبا ما نتمكن من عزل عدد قليل منها تكون الأكثر فاعلية وتأثيرا في تحديد z، أي تحديد جملة من المتغيرات المسيطرة. لنفترض، مثلا، أن متغيرا X يمكن قياسه عمليا بدون خطأ هو المتغير المسيطر الذي يعود له معظم الأثر في تحديد قيمة z، فيمكن عندئذ فصل النموذج $z = g(x, x_1,\ldots,x_k)$ بحيث يتخذ الصيغة التالية:

$$z = \mu(x) + h(x, x_1,\ldots, x_k) \qquad (٤, ١١)$$

حيث الدالة $\mu(x)$ معروفة (باستثناء معالم مجهولة) والدالة $h(x,x_1,\ldots,x_k)$ غير معروفة. ومن المفترض أن قيم $h(x,x_1,\ldots,x_k)$ صغيرة بالقياس إلى قيمة $\mu(x)$ من أجل قيم جميع قيم x، x_1، ...، x_k في الساحة المعنية. وإذا لم يكن الأمر كذلك فقد لا يكون النموذج مفيدا. وهكذا يدرك الباحث أن المتغير x هو المتغير المسيطر في مسألة تحديد z، ويدرك أيضا أن هناك متغيرات أخرى x_1، ...، x_k (بعضها عشوائي وبعضها غير عشوائي) كان ينبغي أن يتضمنها النموذج إذا كان له أن يحدد z بالضبط. ويفترض بالإضافة إلى ذلك أن هذه المتغيرات ثانوية من حيث أهميتها في تحديد z وأنها تتغير بصورة غير معروفة مع

تغير المتغير الرئيس x. وهكذا توجد ريبة وعدم قدرة على التنبؤ بقيم z يعودان إلى تأثيرات المتغيرات الباقية x_1، ...، x_k مما يضفي على النموذج (ضجة) أو (ضوضاء)، هو ما يطلق عادة على ما يبدو أنه مركبة تغير عشوائية لا تزال باقية في z بعد أن أحطنا بتأثير المتغير المعروف x. وهكذا نكتب (١١ , ٤) على الشكل:

$$Y = \mu(x) + \varepsilon \qquad (٤, ١٢)$$

حيث وضعنا المتغير العشوائي ε بدلا من $h(x,x_1,\ldots,x_k)$. لاحظ أن Y حلّت محل z الآن، وإذا كان $E(\varepsilon) = 0$ فإن للمتغير العشوائي Y توقعا يساوي $\mu(x)$. وهذا نموذج إحصائي كذاك المعروف في (١ , ٤) ومن المهم ملاحظة أنه يمكن استخدام $\mu(x)$ لتحديد z ولكن قيمة $\mu(x)$ من أجل x محددة لا تعطي القيمة «الصحيحة» المقابلة للمتغير z إذ يمكن أن يوجد العديد من القيم المختلفة للمتغير z في مقابل قيمة x تلك. فمن أجل $x = a$ مثلا، نجد من(١١ , ٤) أن:

$$z = \mu(a) + h(a, x_1,\ldots,x_k)$$

وستعتمد قيمة z على قيم x_1، ...، x_k، التي يمكن لها أن تأخذ قيما مختلفة في مقابل القيمة المثبتة نفسها $x = a$. وإذا كتبنا هذه العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$Y = \mu(a) + \varepsilon$$

وكانت قيم $h(a, x_1,\ldots,x_k)$ تتغير ضمن فترة صغيرة (أي كان $Var(\varepsilon)$ صغيرا) فعندئذ يمكن اعتبار $\mu(a)$ عمليا تقريبا مُرضيا لقيمة z المقابل للقيمة $x = a$.

وتعود المركبة العشوائية في (١٢ , ٤) إلى خطأ معادلة نتيجة استخدامنا $\mu(x)$ بدلا من القيمة الصحيحية $\mu(x) + h(x,x_1,\ldots,x_k)$ للمتغير z. وينبغي التنويه إلى أنه إذا كانت Y غير قابلة للمشاهدة وإنما هناك خطأ قياس عند قياس Y فعندئذ يمكن كتابة $Y^* = Y + \varepsilon^*$، وبدلا عن المعادلة (١٢ , ٤) نضع عندئذ:

$$Y^* = \mu(x) + \varepsilon^{**} \qquad (٤, ١٣)$$

حيث $\varepsilon^{**} = \varepsilon + \varepsilon^{*}$. وتنتمــي هــذه الصيغة أيضا إلى الإطار العام الموصوف في (١ , ٤) ومركبة الخطأ ε^{**} تنطوي على مركبتين إحداهما مركبة خطأ المعادلة والأخرى مركبة خطأ القياس. كما نلاحظ أن $h(x,x_1,\ldots,x_k)$، وقد أصبحت ε في المعادلة (١٢ , ٤) تفيد ضمنا أن ε يعتمد على المتغير المسيطر x، وبالتالي يعتمد توزيع ε على المتغير x، كما هو الحال فعلا في بعض النماذج حيث لا نستطيع تجاهل حقيقة أن $Var(\varepsilon)$ يعتمد على x وسيشكل هذا عندئذ نقصا أو علّة في النموذج تستدعي المعالجة، وبصورة عامة سنفترض دائما، وكجزء من النموذج أن $E(\varepsilon) = 0$ أياً كانت قيمة x، ذلك لأنه إذا كان $E(\varepsilon)$ معتمدا على x فيمكن استيعاب ذلك داخل الجزء $\mu(x)$ نفسه.

مثال (١): لنفترض أن المسافة s التي تقطعها نقطة مادية خلال زمن t معطى بالعلاقة:

$$s = \beta_0 + \beta t \qquad (٤, ١٤)$$

فالمتغير t متغير غير عشوائي وسنفترض أنه يمكن قياسه بدون خطأ، إلا أن المسافةs لا يمكن قياسها بدقة، وإنما نشاهد قيمة Y حيث $Y = s + \varepsilon$، وε خطأ قياس. وبالتعويض نجد:

$$Y = \beta_0 + \beta t + \varepsilon\,,\ E(\varepsilon) = 0\,,\ \ Var(\varepsilon) = \sigma^2 \quad (\text{مجهول}) \qquad (٤, ١٥)$$

ولنفترض أن هذا النموذج يصلح للتطبيق ضمن الفترة $0 \le t \le 100$. فهذا نموذج علاقة دالية مع خطأ قياس في المتغير التابع. ويختار الباحث n من القيم t_1، t_2، ...، t_n ويشاهد المسافات المقابلة y_1، y_2، ...، y_n. وهكذا يكون نموذج العينة:

$$Y_i = \beta_0 + \beta t_i + \varepsilon_i\,,\ E(\varepsilon_i) = 0\,,\ i = 1,\ldots,n$$

ويتفق هذا مع النموذج الخطي البسيط في (١ , ٤).

مثال (٢): من المعروف أن تيار الماء في نهر ممتد يحمل معه حصى، على طول مساره، وتصبح الحصيّة أكثر نعومة وتتجه إلى الاستدارة في شكلها وهي تمضي مع

مجرى مياه النهر. ويمكن الاستفادة من شكل الحصى لتحديد المسافة التي قطعتها وبالتالي التعرف على مصادرها. ويهتم الجيولوجي بالعلاقة بين شكل حصيات الجرانيت (مقياس لكروية الحصاة) والمسافة التي قطعتها عبر مجرى النهر بدءا من الموقع الذي يعتبر مصدرا لها. والنموذج الخطي هو :

$$Y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon , E(\varepsilon) = 0 ,\ Var(\varepsilon) = \sigma^2 \quad \text{(مجهول)} \qquad (٤, ١٦)$$

وهو نموذج بخطأ معادلة نظرا لوجود عوامل أخرى غير عامل المسافة المقطوعة يؤثر في كروية الحصاة Y.

لنفترض أن هذا النموذج يصح لقيم x ضمن الفترة $50 \le x \le 300$ ميل ، أي أن الساحة D هي $D = \{x: 50 \le x \le 300\}$. ولدينا هنا مجموعة غير قابلة للعد من قيم x. لنفترض أنه من أجل كل $x \in D$، يتوزع $Y(x)$ وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu(x)$ وتباين σ^2، حيث $\mu(x) = \beta_0 + \beta x$، وحيث β_0، β، وσ^2 معالم مجهولة. ومن المهم ملاحظة أننا لم نعرض شيئا يتعلق بالتوزيع المشترك للمتغيرات العشوائية ، ولكن عرضنا التوزيع الهامشي للمتغير $Y(x)$ لكل قيمة من قيم x في الساحة D.

وأحد أهداف هذا النموذج هو تقدير المعالم β_0، β، و σ^2 بالاستفادة من مشاهدات عينة من النموذج. وهدف آخر يمكن أن يكون تقدير x_0 المسافة التي قطعتها حصاة بدءا من مصدرها وذلك من خلال مقياس كرويتها y_0. ويُشار إلى هذا أحيانا بالانحدار المعاكس حيث نستخدم قيمة للمتغير التابع لتقدير قيمة للمتغير المستقل.

لنفترض أن الباحث قرر قياس كروية حصاة (أو بصورة أكثر واقعية حفنة من الحصيّات) وذلك كل 50 ميل من مجرى النهر. وهكذا يختار مثلا مجموعة من 6 قيم للمتغير x من الساحة D، يرمز لها بالرموز $x_1 = 50$، $x_2 = 100$، $x_3 = 150$، $x_4 = 200$، $x_5 = 250$، $x_6 = 300$ وهذا يحدد التوزيعات F التي سيعاينها. ويحصل الباحث على

مشاهدات الكروية من ستة توزيعات لستة متغيرات عشوائية هي : $Y_{(50)}$ ، $Y_{(100)}$ ، $Y_{(150)}$ ، $Y_{(200)}$ ، $Y_{(250)}$ ، $Y_{(300)}$. وسنستخدم الرمز Y_1 لمتغير العينة العشوائية حيث $x = x_1$ ، أي أن Y_1 ترمز لمشاهدة عشوائية من دالة التوزيع للمتغير العشوائي $Y_{(x_1)}$ ، وللرموز Y_2 ، ... ، Y_6 معان أو تفسيرات مشابهة. وعلى سبيل المثال، إذا اخترنا هنا عشوائيا حصاة من مجرى النهر عند الموقع الذي يبعد 50 ميلا عن نقطة البدء، فنحصل على المشاهدة Y_1 التي تمثل مشاهدة عشوائية لمقياس الكروية. وإذا أعيدت هذه العملية في المواقع الخمسة التالية وتمّت الاختيارات بصورة يمكن معها اعتبار المشاهدات الست مستقلة بعضها عن بعض، فيمكن عندئذ كتابة نموذج العينة على الشكل :

$$Y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \text{ ,مستقلة } \varepsilon_i \text{ , } E(\varepsilon_i) = 0 \text{ , } i = 1,\ldots,n \qquad (٤, ١٧)$$

وعلى أساس هذه الأزواج الستة (x_1,y_1) ، ... ، (x_6,y_6) نستقرئ حول β_0 ، β ، σ^2 وحول دوال في هذه المعالم.

وكقاعدة عامة لا يمكننا الاستقراء حول توزيع (مجتمع) لم نأخذ منه أي عينة (لم نعاينه). وفي مثالنا هنا لم نشاهد أي حصاة على مسافة $x = 235$ ميلا وبالتالي لم نعاين التوزيع $F_{Y(235)}(\cdot)$ ، ولكننا افترضنا في نموذج المجتمع أن المتغير العشوائي $Y_{(235)}$ يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $\beta_0 + 235\beta$ وتباين σ^2 ، ومع حصولنا على قيم تقديرية للمعالم β_0 ، β ، σ^2 من العينة ذات المشاهدات الست التي ذكرناها يمكننا تقدير متوسط وتباين $Y_{(235)}$ دون أن يكون لدينا أي مشاهدة من هذا التوزيع.

ويجدر التنويه إلى أننا لا نستطيع تقدير متوسط وتباين التوزيع $Y_{(350)}$ ، مثلا ، لأننا لا نعلم شيئا عن $\mu(x)$ خارج الفترة $50 \le x \le 300$ ، وقد يكون $\mu(x)$ مختلفا عما افترضناه كنموذج مقبول ضمن هذه الفترة، ونعني $\mu(x) = \beta_0 + \beta x$. وربما اقتصر

الباحث على هذه الفترة $50 \le x \le 300$ لأن اهتماماته تنحصر فيها، أو لأنه لا يملك معلومات كافية لنمذجة الظاهرة المدروسة بصورة تتعدى هذه الفترة.

مثال (٣): نرغب في دراسة العلاقة بين درجة الحرارة x_1 والضغط x_2 من جهة وبين متانة مادة مصنعة، Y من جهة أخرى. وكتقريب أولي نفترض نموذج المجتمع:

$$Y_{(x_1,x_2)} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0$$

فوق الساحة D:

$$D = \{(x_1, x_2): 500 \le x_1 \le 1500 \; ; \; 1000 \le x_2 \le 2000\}$$

حيث x_1 مقاسة بالدرجات المئوية وx_2 مقاس بالأرطال (الباوند) لكل بوصة مربعة، وY بالأرطال لكل بوصة مربعة. ونرغب في الحصول على صورة للاستجابة Y فوق الساحة، ولهذا الغرض أخذنا عينة تتضمن قيمة للمتانة Y عند درجات حرارة x تبعد الواحدة عن الأخرى بمقدار 100 درجة مئوية وعند ضغوط x_2 يبعد الواحد عن الآخر بمقدار 100 رطل للبوصة المربعة. ونفترض أنه لكل (x_1, x_2) من الساحة D المذكورة آنفا يتبع المتغير العشوائي Y التوزيع الطبيعي بمتوسط $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ وتباين σ^2. وهكذا نختار عينة من مشاهدة واحدة Y من كل من توزيعات المتغيرات $Y_{(300, 1000)}$، $Y_{(600,1000)}$، ...، $Y_{(1500,2000)}$، ولنرمز لقيم هذه العينة بالرموز y_1، y_2، ...، y_{121}، إذ يوجد 121 من القيم المتميزة لِ (x_1,x_2). وأحد الأهداف هنا هو إيجاد القيمة (x_1,x_2) التي تجعل $\mu(.,.)$ أعظم ما يمكن، أي إيجاد قيمة درجة الحرارة وقيمة الضغط المؤديتين إلى أكبر متانة للمادة المصنعة.

وقد تعين هذه الأمثلة في فهم كيفية استخدام النموذج الخطي العام لنمذجة حالات من العالم الواقعي.

(٣, ٤) نموذج الانحدار الخطي

الشيء الرئيس المميز لنموذج الانحدار الخطي عن النموذج الخطي العام هو أن المتغير المستقل في هذا الأخير غير عشوائي بينما يكون عشوائيا في نموذج الانحدار الخطي العام. وهكذا يكون لمتغيرين Z وX، مثلا، توزيع مشترك، وأحد الأهداف هو تقدير معالم التوزيع الشرطي لِ $(Z|X=x)$. وعند انطباق نموذج الانحدار الخطي فإنه يسمح، في العديد من المسائل، بتحليل أكثر كمالا للحالة المدروسة بالاستفادة من الارتباط.

ولتقديم هذا النموذج سنفترض أن Z وX يتوزعان بصورة مشتركة وفق التوزيع الطبيعي بمتغيرين بمتجه متوسطات ومصفوفة تغاير ومعامل ارتباط كما يلي:

$$\underline{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_Z\\ \mu_X\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_Z^2 & \sigma_{XZ}\\ \sigma_{ZX} & \sigma_X^2\end{bmatrix},\ \rho=\frac{\sigma_{XZ}}{\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Z^2}}$$

ونعلم من (٢, ١٠) أن متوسط وتباين التوزيع الشرطي لـ $(Z|X=x)$ هما:

$$E[Z|X=x]=\mu_Z+\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}(x-\mu_X)=\beta_0+\beta_1 x$$

حيث $\beta_1=\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2},\ \beta_0=\mu_Z-\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}\mu_X$ ، وتباين:

$$Var[Z|X=x]=\sigma_Z^2-\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}=\sigma_Z^2(1-\rho^2)=\sigma^2$$

وسنستخدم الرمز $Y=(Z|X=z)$ لتمثيل المتغير العشوائي الذي دالة كثافته الشرطية $f_{Z|X=x}(y)$.

ونستخدم $\mu_Y(x)$ لتمثيل متوسط $Y=(Z|X=z)$ ، وهكذا يكون $\mu_Y(x)=\beta_0+\beta x$ ، و σ_Y^2 (أو σ^2) لتمثيل تباين $Y=(Z|X=x)$ ، أي أن $\sigma_Y^2=\sigma_Z^2(1-\rho^2)$. ويمكننا الآن كتابة:

$$Y=(Z|X=x)=\mu_Y(x)+\varepsilon(x)\ ,\ \varepsilon(x)\sim N(0,\sigma^2),\ -\infty<x<+\infty$$

وهذا يوضح مدى التشابه بين هذا النموذج والنموذج الخطي العام. وفي الحقيقة، فإن التحليل الإحصائي وطرق الاستقراء المستخدمة في النموذج الخطي العام يمكن استخدامها أيضا في نموذج الانحدار الخطي.

مثال (٤): لنفترض أننا نرغب في تحديد طول يافع Z من سكان مدينة كبيرة عند بلوغه سن الثامنة عشرة وذلك من معرفتنا بطوله X عندما كان في العاشرة من عمره. ونفترض أن أطوال الذكور في المدينة في سن الثامنة عشرة Z وفي سن العاشرة X يتبعان التوزيع الطبيعي بمتغيرين. أي أن $\begin{bmatrix} Z \\ X \end{bmatrix}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\underline{\mu}=\begin{bmatrix} \mu_Z \\ \mu_X \end{bmatrix}$ ومصفوفة تغاير $\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_Z^2 & \sigma_{ZX} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_X^2 \end{bmatrix}$.

لنفترض أننا نريد التنبؤ بما سيكونه طول شخص عمره عشر سنوات عندما يبلغ الثامنة عشرة، يمكن استخدام المتوسط μ_Z وهو متوسط التوزيع الهامشي للقيام بهذه المهنة، فتوزيع أطوال جميع الذكور في المدينة الذي كانوا أو سيصبحون في الثامنة عشر من عمرهم هو توزيع طبيعي متوسطه μ_Z وتباينه σ_Z^2. إلا أنه توجد قيمة تنبؤ قد تكون أفضل بكثير، بمعنى أن تباينها أصغر من σ_Z^2. ونحصل على مثل هذه القيمة التنبؤية باستخدام متوسط التوزيع الشرطي بدلا من التوزيع الهامشي. هبْ أن الطول عند العاشرة كان x_0 للشخص الذي نريد التنبؤ بطوله عندما يبلغ الثامنة عشرة، نعلم أن طوله حينئذ ينتمي إلى التوزيع الشرطي للمتغير $Y=(Z|X=x_0)$. ونعلم أن متوسط هذا التوزيع هو $\mu_Y(x_0)=\mu_Z+(\sigma_{ZX}/\sigma_X^2)(x_0-\mu_X)$، وأن تباينه $\sigma^2=(1-\rho^2)\ \sigma_Z^2$. وبما أن $\rho^2 \le 1$، وقد يكون ρ^2 قريبا تماما من الواحد، فإن σ^2 سيكون أصغر بكثير من σ_Z^2. وبالتالي فإن احتمال أن يكون طول الشخص المعني في الثامنة عشرة أقرب إلى $\mu_Y(x_0)$ منه إلى μ_Z هو احتمال عال. وسواء بالنسبة إلى μ_Z أو إلى $\mu_Y(x_0)$ التي تنطوي على معلمتين β_0، وβ غير معروفتين، لا يمكن استخدامهما مباشرة للتنبؤ، ولا بد من

اختيار عينة من التوزيع الطبيعي بمتغيرين (Z, X) واستخدامها لتقدير المعالم التي نحتاجها لغرض التنبؤ. وهكذا نختار عشوائيا n من الذكور الذين تجاوزوا الثامنة عشرة ونسجل بالنسبة لكل منهم طوله في العاشرة وفي الثامنة عشرة من عمره فنحصل على (X_1, Z_1)، ...، (X_n, Z_n)، ثم نستخدم هذه العينة لتقدير معالم التوزيع الطبيعي بمتغيرين μ_Z، μ_X، σ_X^2، σ_Z^2، σ_{XZ}^2. ومن هذه القيم التقديرية نقدر β_0، β، وσ^2، وهي المعالم في التوزيع الشرطي لِ $Y = (Z | X = x)$، وأخيرا نقدر $\mu_Y(x)$ لأي قيمة محددة x.

وتنبغي مقارنة المعاينة في نموذج الانحدار الخطي مع المعاينة في النموذج الخطي العام، حيث نحصل أولا على مجموعة من القيم x (عشوائيا أو وفق تصميم معين)، وهذا يحدد الدوال في نموذج المجتمع التي سنحصل منها على قيم عشوائية للمتغير Y. في النموذج الخطي العام يوجد لكل قيمة x من ساحة النموذج D، توزيع احتمالي متوسطه $\beta_0 + \beta_1 x$ وتباينه σ^2، بينما لا يوجد في نموذج الانحدار الخطي إلا توزيع واحد هو التوزيع بمتغيرين (Z, X)، ونفترض أن متوسط التوزيع الشرطي لِ $(Z | X = x)$ هو $\beta_0 + \beta_1 x$ وتباين σ^2.

ويمكن تعميم هذه الأفكار إلى حالة $k + 1$ من المتغيرات العشوائية $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ وليس من الضروري أن يكون توزيعها المشترك طبيعيا. (وضعنا X_0 بدلا من Z). ونعرف فيما يلي النموذج العام للانحدار الخطي.

تعريف (٣): نموذج الانحدار الخطي العام: لتكن المتغيرات العشوائية X_0، X_1، ...، X_k لها توزيع احتمالي مشترك بمتجه متوسطات $\underline{\mu}^*$ ومصفوفة تغاير Σ^* وبحيث يحقق التوزيع الشرطي للمتغير $Y = (X_0 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k)$ الشروط التالية:

١- $$E[(X_0 | X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k)] = \mu_Y(x_1, \ldots, x_k) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

أي أن متوسط المتغير الشرطي Y دالة خطية في المعالم β_i وخطية في المقادير x_i.

٢- $Var[(X_0|X_1 = x_1,...,X_k = x_k)] = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

فتعرّف هذه المواصفات عندئذ ما يسمى نموذج الانحدار الخطي العام.

ويجدر التنويه إلى أن الشرط (٢) يعني أن σ^2 مقدار منته ولا يعتمد على القيم المشروطة x_1، ... ، x_k. كما أننا في حالات معينة نضيف شرطا ثالثا هو أن التوزيع المشترك للمتغيرات X_0، X_1، ... ، X_k هو التوزيع الطبيعي.

مثال (٥): من المعروف أنه من الصعب التنبؤ بدقة بإنتاج القمح لقطعة من الأرض. وندرك العديد من العوامل المؤثرة في مثل هذا الإنتاج، وإن كنا لا ندركها جميعا، كما أن المعادلة التي تربط بين هذه العوامل والإنتاج غير معروفة. وعلى وجه العموم يمكن القول إن المعدل اليومي لدرجة الحرارة X_1، ومؤشر الأمطار الساقطة X_2، ومقدار التعرض لأشعة الشمس X_3، وخصوبة التربة X_4، بالإضافة إلى العديد من العوامل الأخرى تؤثر في محصول القمح الناتج X_0. وكتقريب أولي، سنفترض أن المتغيرات العشوائية X_0، X_1، X_2، X_3، X_4 تشكل متجها من خمس مركبات يخضع للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات. وبالتالي نكون قد حددنا نموذج انحدار خطي عام كما ورد في التعريف (٣). ولمعاينة هذا النموذج يمكن افتراض أن هذه القياسات الخمسة مأخوذة فوق جميع المزارع في منطقة واسعة تشكل مجتمعا طبيعيا بخمسة متغيرات. ويمكن أن يقرر الباحث اختيار 30 من هذه المزارع عشوائيا وقياس المتغيرات الخمسة في كل منها. ونرمز للعينة المشاهدة عندئذ كما يلي:

رقم العينة المتسلسلة	
1	$[X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}]$
2	$[X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}]$
.	.
.	.
.	.
30	$[X_{30.0}, X_{30.1}, X_{30.2}, X_{30.3}, X_{30.4}]$

إذا افترضنا أن المعاينة قد تمت بحيث أن المشاهدات من مزرعة إلى أخرى مستقلة بعضها عن بعض فعندئذ نكون قد حصلنا على عينة حجمها 30 من توزيع طبيعي بخمسة متغيرات، ونريد تقدير μ_{X_0} ، μ_{X_1} ، ... ، μ_{X_4} ، $\sigma^2_{X_0}$ ، $\sigma^2_{X_1}$ ، ... ، $\sigma^2_{X_4}$ ، ρ_{X_0,X_1} ، ρ_{X_0,X_2} ، ... ، ρ_{X_3,X_4} ومنها تقدير $\mu_Y(x_1,x_2,x_3,x_4)$ للتنبؤ بإنتاج القمح وتحديد ما إذا كانت زراعة القمح في هذه المزرعة مربحة أم لا.

مثال (٦): لنفترض دراسة تهدف إلى التعرف على تأثير العمر X_1 ونسبة الكوليستيرول في الدم X_2، على ضغط الدم الانبساطي X_0 عند النساء اللاتي تجاوزن الخامسة والثلاثين من العمر. ونفترض أن العمر X_1 والكوليستيرول X_2 وضغط الدم الانبساطي X_0 عند كافة النساء اللاتي تجاوزن الخامسة والثلاثين في المملكة تشكل توزيعا بثلاثة متغيرات يحقق شروط التعريف (٣)، ولمعاينة هذا النموذج نختار عشوائيا n من النساء اللاتي تجاوزن الخامسة والثلاثين، ونقيس عند كل منهن العمر، نسبة الكوليستيرول في الدم، وضغط الدم الانبساطي، ونرمز للعينة العشوائية المشاهدة كما يلي:

رقم العينة المتسلسلة	
1	$[X_{10}, X_{11}, X_{12}]$
2	$[X_{20}, X_{21}, X_{22}]$
.	.
.	.
.	.
n	$[X_{n0}, X_{n1}, X_{n2}]$

إذا افترضنا أن هذه العينة هي عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي بثلاثة متغيرات، وبدلا من تحديد الدالة $\mu_Y(x_1,x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ للتنبؤ بضغط الدم بدءا من معرفة العمر ونسبة الكوليستيرول، نهدف هنا إلى تقدير β_2، وهو يمثل التغير في ضغط الدم المقابل لتغير قدره الواحد في نسبة الكوليستيرول. ومن هذا التقدير يمكن تحديد ما إذ كان يمكن لامرأة تعاني من ارتفاع ضغط الدم وارتفاع الكوليستيرول أن

تخفض ضغط الدم عندها من خلال التحكّم بنسبة الكوليستيرول وتخفيضه باتباع حمية غذائية مناسبة.

(٤, ٤) نماذج التصميم

سنعرض في هذه الفقرة والفقرة التالية نوعين كيفيين (وصفيين) من النماذج هما نماذج التصميم ونماذج مركبات التباين. ويشير مصطلح الكيفي (الوصفي) والكمي هنا إلى متغير التنبؤ أو المتغير المستقل x المستخدم في الفقرات السابقة. ويكون النموذج كميا، بصورة عامة، إذا كانت المتغيرات المستقلة x ، قابلة للقياس مثل الوزن، الطول، الزمن، الضغط إلخ. وإذا كانت وصفية مثل اللون، الصنف، أنواع الآلات، أنواع السيارات، طرق الإنتاج، فيسمى النموذج نموذجا كيفيا (وصفيا). ويجدر التنويه هنا إلى إمكانية وجود تصنيفات وصفية معبر عنها بدلالة متغيرات كمية وذلك عندما نستخدم هذه المتغيرات الكمية بطريقة وصفية بغية التصنيف. وسنعرض لذلك في المثال (٨). وقبل تعريف نموذج التصميم سنوضح ببعض الأمثلة.

مثال (٧): لنفترض أن شركة تريد معرفة ما إذا كانت توجد أية فروق تُذكر في متانة مسامير فولاذية ملولبة بقطر $\frac{3}{4}$ بوصة ومصنّعة بطريقتين مختلفتين. وهناك مجتمعان في دراسة كهذه، ويتضمن المجتمع i إنتاج الشركة السنوي من المسامير المصنوعة بالطريقة i ، $i = 1,2$. ليكن (μ_1, σ_1^2) متوسط وتباين المجتمع (التوزيع) الأول و(μ_2, σ_2^2) متوسط وتباين المجتمع (التوزيع) الثاني. اخترنا عينة من 3 مسامير من كل من المجتمعين وقسنا متانة كل مسمار فيهما. لنرمز للقيم المشاهدة بالرموز Y_{11} ، Y_{12} ، Y_{13} ، Y_{21} ، Y_{22} ، Y_{23} حيث يشير الدليل الأول للمجتمع ويشير الدليل الثاني للقياس ضمن العينة المأخوذ من هذا المجتمع. ويمكن كتابة النموذج بصورة مفصّلة كما يلي:

$$Y_{11} = \mu_1 + \varepsilon_{11} \qquad Y_{21} = \mu_2 + \varepsilon_{21}$$
$$Y_{12} = \mu_1 + \varepsilon_{12} \qquad Y_{22} = \mu_2 + \varepsilon_{22} \qquad (٤, ١٨)$$
$$Y_{13} = \mu_1 + \varepsilon_{13} \qquad Y_{23} = \mu_1 + \varepsilon_{23}$$

أو على الشكل:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (٤, ١٩)$$

حيث:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \ \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \qquad (٤, ٢٠)$$

وتتألف المصفوفة X من الأعداد 0 و1 فقط فهي مصفوفة مؤشرات، إذ تشير قيمة كل عنصر x_{ij} من المصفوفة X إلى ما إذا كان μ_i متواجد في المعادلة المعنيّة أم لا. ولكن النموذج كما كتبناه في (٤، ١٩) مماثل تماما للنموذج الخطي العام وتنطبق عليه معظم عمليات الاستقراء، المطبقة في النموذج الخطي العام.

مثال (٨): سنوضح في هذا المثال كيف يمكن استخدام متغيرات كمية فيما يسمى نموذج كيفي (وصفي).

لنفترض تجربة أو دراسة تهدف إلى تحديد مدى تأثّر متانة قماش معين بدرجة حرارة الماء الذي يُغسل فيه وذلك بعد تعرضه لمائة غسلة. وقد تقرر استخدام درجتين لحرارة الماء عند الغسل هما °150 فهرنهايت و°180 فهرنهايت، واستخدمنا ثلاث قطع من القماش متماثلة غُسلت مائة مرة وذلك عند كل من درجتي الحرارة، ثم قسنا بعد ذلك متانة كل قطعة. ليكن Y_{ij} قياس المتانة للقطعة j من القماش المغسولة بدرجة الحرارة i، حيث يشير $i = 1$ إلى الدرجة 150 و$i = 2$ إلى الدرجة 180، فيمكن كتابة النموذج على الشكل:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \ , \quad i = 1, 2 \ ; \ j = 1,2,3 \qquad (٤, ٢١)$$

وبرموز المصفوفات نكتب :

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

أو بالتفصيل :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \qquad (٤, ٢٢)$$

ودرجة الحرارة متغير كمي إلا أنه مستخدم هنا للتصنيف إلى صنفين، مجتمع القماش المغسول بدرجة حرارة 150 ومجتمع القماش المغسول بدرجة حرارة 180. والمصفوفة X هي مصفوفة مؤشرات تتضمن الأرقام 0 و1 فقط وهي تشير، على الترتيب، إلى غياب أو حضور μ_1 أو μ_2 في المعادلة المعنيّة. وفي هذا النموذج تشكل Y_{11} ، Y_{12} ، Y_{13} عينة عشوائية من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ^2 (نفترض $E(\varepsilon_{ij}) = 0$ و $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$ والمقادير ε_{ij} مستقلة). وتشكل Y_{21} ، Y_{22} ، Y_{23} عينة عشوائية من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ^2. وهدف الدراسة هو تقدير μ_1 ، μ_2 ثم الفرق μ_1-μ_2. وقد يكون من المناسب والمفيد كتابة μ_i على الشكل $\mu_i = \mu + \tau_i$ ، حيث μ وهو متوسط المتانة لجميع قطع القماش قبل غسله وτ_i المتانة المضافة العائدة إلى غسل القماش بدرجة حرارة i (يمكن أن يكون τ_i سالبا). وعندئذ يصبح النموذج.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad , \quad E(\varepsilon_{ij}) = 0 \ , i = 1,2 \ ; \ j = 1,2,3 \qquad (٤, ٢٣)$$

وبدلالة المصفوفات يصبح النموذج :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (٤, ٢٤)$$

ونجد في المعادلتين (٢١ ,٤) و (٢٣ ,٤) نموذجين مختلفين يعبران عن الدراسة نفسها. وكتابة $\mu + \tau_i$ بدلا من μ_i يجعل المتجه $\underline{\beta}$ مؤلفا من متجهين جزئيين أحدهما المتجه $\underline{\mu}$ والآخر المتجه $\underline{\tau}$ أي أن $\underline{\beta}' = [\underline{\mu}, \underline{\tau}']$ حيث $\underline{\mu} = [\mu]$ و $\underline{\tau}' = [\tau_1, \tau_2]$. وقد لا يبدو مثل هذا التعديل في عبارة النموذج ضروريا في هذا المثال، إلا أنه من المفيد في أمثلة وحالات أكثر تعقيدا اللجـوء إلى التعبير عن النمـوذج بالشكل المعروض في الـمعادلة (٢٣ ,٤) وتجدر ملاحظة أن المصفوفة X كما وردت في المعادلة (٢٤ ,٤) أبعادها 6×3 ورتبتها 2 بينما أبعاد المصفوفة X كما وردت في المعادلة (٢٢ ,٤) هي 6×2 ورتبتها 2، ونقول إنها ذات رتبة تامة، وعلى العكس فإن X في المعادلة (٢٤ ,٤) ذات رتبة غير تامة. وتتمايز الحالتان في الغالب عند إجراء التحليل الإحصائي.

مثال (٩): يريد باحث دراسة تأثير سمادين مختلفين وأربع طرق لتطبيق السماد على إنتاج صنف من أصناف الذرة الصفراء. لنرمز لتأثير السماد i بالرمز α_i $(i = 1,2)$، ولتأثير الطريقة j في تطبيق السماد بالرمز τ_j، $(j = 1,2,3,4)$. وإذا افترض الباحث أن التأثيرات تجميعية أي تضاف بعضها إلى بعض فيمكنه كتابة النموذج التالي:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \mu + \alpha_1 + \tau_1 + \varepsilon_{11} \\ Y_{12} &= \mu + \alpha_1 + \tau_2 + \varepsilon_{12} \\ Y_{13} &= \mu + \alpha_1 + \tau_3 + \varepsilon_{13} \\ Y_{14} &= \mu + \alpha_1 + \tau_4 + \varepsilon_{14} \\ Y_{21} &= \mu + \alpha_2 + \tau_1 + \varepsilon_{21} \\ Y_{22} &= \mu + \alpha_2 + \tau_2 + \varepsilon_{22} \\ Y_{23} &= \mu + \alpha_2 + \tau_3 + \varepsilon_{23} \\ Y_{24} &= \mu + \alpha_2 + \tau_4 + \varepsilon_{24} \end{aligned} \quad (٤, ٢٥)$$

أو بشكل مختصر:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}\ ,\ i = 1,2\ ;\ j = 1,2,3,4 \qquad (٤, ٢٦)$$

حيث Y_{ij} الإنتاج المشاهد من الذرة الصفراء في قطعة من الأرض تلقت السماد i مطبقا بالطريقة j. ويفترض الباحث هنا أن الإنتاج Y_{ij} يساوي عددا ثابتا μ وهو متوسط الإنتاج عند عدم تطبيق أي سماد، مضافا إليه α_i وهو التأثير الذي يعود إلى السماد i، مضافا إليهما τ_j وهو التأثير الذي يعود إلى تطبيق الطريقة j، وذلك بالإضافة إلى ε_{ij} الذي يعود إلى عوامل أُغفلت أو عوامل لا يمكن للباحث التحكم فيها، كالفرق في الخصوبة بين القطع المستخدمة من الأرض. وقد يرغب الباحث في اختبار أو تقدير دالة في المعالم μ، α_i، τ_j. ويصبح النموذج برموز المصفوفات:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

وعند كتابته بالتفصيل نجد:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{14} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ Y_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{24} \end{bmatrix} \qquad (٤, ٢٧)$$

ونلاحظ هنا عدة أمور:

١ - تتألف المصفوفة X من الأعداد 0، 1 فقط فهي مصفوفة مؤشرات.

٢ - يمكن تجزئة المتجه $\underline{\beta}$ إلى ثلاثة متجهات جزئية.

$$\beta = \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\alpha} \\ \underline{\tau} \end{bmatrix} \qquad (٤, ٢٨)$$

حيث $\underline{\mu} = [\mu]$ ويتألف من المتوسط العام فقط ، $\underline{\alpha}' = [\alpha_1,\alpha_2]$ ويتألف من المعالم التي تشير إلى السمادين و$\underline{\tau}' = [\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4]$ ويتألف من المعالم التي تشير إلى الطرق الأربع لتطبيق السماد.

٣- تتضمن كل معادلة في النموذج عنصرا واحد بالضبط من كل من المتجهات الجزئية مما يفرض على المصفوفة X أن تتخذ نمطا معينا.

تعريف (٤): يحقق نموذج التصميم تعريف النموذج الخطي العام باستثناء أن رتبة المصفوفة X وأبعادها $n{\times}p$ هي k حيث $n > p \geq k$. بالإضافةإلى أن المصفوفة X مشكلة من الأعداد 0 أو 1 فقط. وتتخذ المصفوفة X نمطا معينا يختلف باختلاف التصميم المتّبع في الدراسة.

(٤, ٥) نموذج مركبات التباين

شكل النموذج مماثل لنموذج التصميم باعتبار أن المتغيرات x_{ij} تتخذ القيم 0 أو 1 فقط. ويمكن كتابة النموذج في أبسط أشكاله وفق الصيغة $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$. وفي هذا النموذج يكون كل من τ_i وε_{ij} متغيرات عشوائية غير قابلة للمشاهدة بتباينين σ_τ^2 وσ^2، على الترتيب. والهدف من هذا النموذج مشاهدة Y_{ij} وتقدير σ_τ^2 وσ^2. ونوضح بمثال.

مثال (١): لدراسة محتوى أوراق الشجر في بستان من الآزوت، جُمعت أوراق من أشجار البستان وقيس محتواها من الآزوت. ووجد هنا مصدران رئيسان للتغير، التغير من ورقة إلى أخرى على شجرة، والتغير من شجرة إلى أخرى من أشجار البستان، والهدف هو قياس التغيرين هذين. ومن المستحيل قياس المحتوى الفعلي الصحيح من الآزوت في أوراق شجرة دون تعرية الشجرة من جميع أوراقها وقياس محتوى كل ورقة. ليكن $f_T(\cdot)$ توزيع المتغير العشوائي T الذي يمثل متوسط محتوى الآزوت في أوراق شجرة، فمن الناحية النظرية يمكن إيجاد $f_T(\cdot)$ بعد تحديد محتوى الآزوت في كل شجرة من البستان (وبالطبع بعد تحديد محتوى كل ورقة من أوراق كل شجرة) ثم

إقامة مضلع تكرار نسبي للنتائج. وهكذا نجد أنفسنا في موقع مَن يهدف إلى تحديد (أو تقدير) σ_T^2 ، تباين T ، دون أن يكون قادرا على معرفة أي من قيم T. ولإنجاز هذا الهدف سنستعرض نموذجا نظريا. نختار عشوائيا بعضا من أشجار البستان، ثم نختار عشوائيا من كل من هذه الأشجار بعض أوراقها، ثم نقيس محتوى الآزوت في كل ورقة من الأوراق التي اخترناها، ونستخدم هذه البيانات المشاهدة مع النموذج النظري لتقدير σ_T^2. وإلى جانب T ، يوجد متغير عشوائي آخر يمثل محتوى الورقة من أوراق شجرة بعينها ولنفرض أن تباين هذا المتغير العشوائي σ_l^2 ، وأنه يبقى ثابتاً من شجرة إلى أخرى. لنتّبع النهج التالي في المعاينة:

١ - نختار شجرة عشوائيا ونفترض أن محتواها من الآزوت T_1^* (متغير عشوائي غير قابل للمشاهدة).

٢ - نختار عشوائيا J ورقة من أوراق هذه الشجرة ونقيس محتوى الآزوت في كل ورقة اخترناها، ولنرمز للقيم المشاهدة بالرموز Y_{11} ، Y_{12} ، ... ، Y_{1J}.

٣ - نكتب النموذج لأول شجرة اخترناها على الشكل:

$$Y_{1j} = \mu + \left(T_1^* - \mu\right) + \left(Y_{1j} - T_1^*\right),\ j = 1,2,\dots,J$$

حيث μ متوسط المحتوى من الآزوت للورقة الواحدة على مستوى أوراق البستان بأكمله و T_1^* متوسط المحتوى من الآزوت لأوراق الشجرة الأولى التي اخترناها.

٤ - نكرر العملية فنختار عشوائيا I من أشجار البستان، ونفترض أن متوسط محتوى الآزوت لهذه الأشجار هو T_1^* ، T_2^* ، ... ، T_I^* ؛ نختار عشوائيا J ورقة من أوراق كل شجرة، وليكن Y_{ij} محتوى الآزوت للورقة j من الشجرة i، ثم نكتب النموذج بصورته العامة على الشكل:

$$Y_{ij} = \mu + \left(T_i^* - \mu\right) + \left(Y_{ij} - T_i^*\right)$$

أو:

$$Y_{ij} = \mu + T_i + L_{ij}\ ,\ i = 1,2,\ldots, I\ ;\ \ j = 1,2,\ldots, J$$

حيث يرمز الحد T_i إلى تأثير الشجرة i ، و$E(T_i) = 0$ ، $Var(T_i) = \sigma_T^2$ ، ويرمز الحد L_{ij} إلى تأثير الورقة j من أوراق الشجرة i ، ومن الواضح أن $E(L_{ij}) = 0$ ، $Var(L_{ij}) = \sigma_l^2$ وذلك لكل i وj . ونفترض أيضا $T_{i'}$ وL_{ij} غير مرتبطين لجميع قيم i ، i' وj. ومع الخواص هذه يمكن كتابة :

$$Var(Y) = Var(T) + Var(L)$$

أو :

$$\sigma_Y^2 = \sigma_T^2 + \sigma_L^2$$

و σ_T^2 ، σ_L^2 هي مركبات التباين للمتغير العشوائي القابل للمشاهدة Y. ويمكن أن نفترض توزيعات طبيعية للمتغيرات T_i ، L_{ij}.

ونلخص الآن، أهم أفكار المناقشة السابقة كمقدمة لتعريف نموذج مركبات التباين. لتكن Y_{ij} ، $i = 1,\ldots,I$ ، $j = 1,\ldots,J$ متغيرات عشوائية قابلة للمشاهدة ويمكن كتابة كل منها وفقا للتركيبة التالية :

$$Y_{ij} = \mu + A_i + \varepsilon_{ij} \quad (٤, ٢٩)$$

حيث A_i و ε_{ij} متغيرات عشوائية غير مرتبطة وغير قابلة للمشاهدة و$E(A_i) = E(\varepsilon_{ij}) = 0$ ، $Var(A_i) = \sigma_A^2$ ، $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$ ، وμ معلمة مجهولة ، فتعرّف هذه المواصفات نموذج مركبات تباين. وأحيانا نضيف توزيعات معينة للمتغيرات A_i، ε_{ij} كجزء من النموذج.

ويمكن كتابة النموذج برموز المصفوفات كما في حالة نموذج التصميم. ولو فرضنا I=2 و J=3 ، فيمكن كتابة النموذج في (٤, ٢٩) كما يلي :

$$\underline{Y} = X\beta + \underline{\varepsilon}$$

حيث :

$$\underline{Y}=\begin{bmatrix}Y_{11}\\Y_{12}\\Y_{13}\\Y_{12}\\Y_{22}\\Y_{23}\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}, \underline{\beta}=\begin{bmatrix}\mu\\\underline{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\\A_1\\A_2\end{bmatrix}, \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{23}\end{bmatrix}$$

μ ثابت غير معروف، A_i متغيرات عشوائية بمتوسط صفر وتباينات σ_A^2 ، وε_{ij} متغيرات عشوائية بمتوسط صفر وتباينات σ_ε^2.

تعريف (٥): نموذج مركبات التباين: لتكن المغيرات العشوائية القابلة للمشاهدة $Y_{ij...m}$ بحيث إن:

$$Y_{ij...m}=\mu+A_i+B_{ij}+\ldots+\varepsilon_{ij...m}$$

حيث μ ثابت، A_i متغير عشوائي متوسطه صفر وتباينه σ_A^2 ، و B_{ij} متغير عشوائي متوسطه صفر وتباينه σ_B^2 ، ... ، $\varepsilon_{ij...m}$ متغير عشوائي متوسطه صفر وتباين σ_ε^2 والمتغيرات العشوائية A_i ، B_{ij} ، ... ، $\varepsilon_{ij...m}$ كافة غير مرتبطة. فتعرّف هذه المواصفات نموذج مركبات تباين.

وفي العديد من الحالات نفترض أيضا توزيعات معينة (مثل التوزيع الطبيعي) للمتغيرات A_i ، B_{ij} ، ... ، $\varepsilon_{ij...m}$.

(٦ , ٤) تمارين

١ - لنفرض أن البيانات التالية أخذت من أحد البحوث التي أجريت لدراسة العلاقة بين متغير الاستجابة Y والمتغيرات المستقلة X_1, X_2, X_3 :

Y	5.6	3.2	4.5	4.2	5.2	2.7	4.8
X_1	116.4	82.7	110.7	97.5	115.9	80.2	125.2
X2	18.4	10.5	15.3	16.5	19.2	11.6	18.6
X_3	4.6	5.4	7.4	6.8	7.4	4.1	8.5

بافتراض أن النموذج المناسب هو النموذج الخطي $Y_i=\beta_o+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\beta_3X_{i3}+\varepsilon_i$ حيث $i=1,2,\ldots,7$ ، مستخدمًا البيانات السابقة مثل هذا النموذج بصيغة النموذج الخطي العام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ موضحًا المكونات $\underline{Y}$ و X و $\underline{\beta}$ و $\underline{\varepsilon}$.

٢ - مثل نموذج التصميم $Y_{ij} = \mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}$ حيث $i=1,2,3,4$ و $j=1,2,3$ بصيغة النموذج الخطي العام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ موضحًا المكونات $\underline{Y}$ و X و $\underline{\beta}$ و $\underline{\varepsilon}$ وكذلك وأبعادها.

٣ - مثل نموذج التصميم $Y_{ij} = \mu_i+\varepsilon_{ij}$ حيث $i=1,2,3,4$ و $j=1,2,3$ بصيغة النموذج الخطي العام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ موضحًا المكونات $\underline{Y}$ و X و $\underline{\beta}$ و $\underline{\varepsilon}$ وكذلك وأبعادها.

٤ - مثل نموذج التصميم $Y_{ijk} = \mu+\alpha_i+\tau_j+\varepsilon_{ijk}$ حيث $i=1,2,3$ و $j=1,2$ و $k=1,2$ بصيغة النموذج الخطي العام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ موضحًا المكونات $\underline{Y}$ و X و $\underline{\beta}$ و $\underline{\varepsilon}$ وكذلك وأبعادها.

٥ - لنفرض أن البيانات أدناه يمكن تمثيلها بنموذج التصميم $Y_{ij} = \mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}$.

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
17	19	19	17
18	16	18	14
19	16	20	15
	20	19	16
	15	21	
		20	
		22	
		21	

مستخدمًا البيانات السابقة اكتب النموذج السابق بالصيغة $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ موضحًا المكونات $\underline{Y}$ و X و $\underline{\beta}$ و $\underline{\varepsilon}$ وكذلك وأبعادها.

الفصل الخامس

التقدير واختبار الفرضيات

(٥,١) مقدمة

سنتناول في هذا الفصل مسألة التقدير النقطي والتقدير بفترة لمعالم النموذج الخطي وسنعالج حالتين نفترض في أولاهما أن توزيع متجه الخطأ $\underline{\varepsilon}$ هو التوزيع الطبيعي $N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$، مما يسمح لنا بتطبيق طريقة الإمكانية العظمى في التقدير. ونتعرف على أهم مواصفات وخصائص هذه التقديرات. وفي الحالة الثانية نكتفي بافتراض أن مركبات متجه الخطأ $\underline{\varepsilon}$ غير مرتبطة أي أن $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ، $i \neq j$. وسنجد أن طريقة المربعات الدنيا تزودنا بالتقديرات النقطية نفسها كما في الحالة الأولى وبمواصفات وخصائص تقصّر، كما هو متوقع، عن تلك التي نجدها في الحالة الأولى، إلا أنها تتقاطع مع خصائص تقديرات الإمكانية بصورة يمكن اعتبارها من وجهة النظر العلمية مرضية تماما. ونعيد هنا تعريف نموذج خطي عام.

تعـــريف (١): ليكن $\underline{Y}$ متجها $n\times1$ من المتغيرات العشوائية قابلا للمشاهدة ؛ لتكن X مصفوفة $n\times p$ $(n > p)$ من الثوابت المعروفة رتبتها p، ليكن $\underline{\beta}$ متجها $p\times1$ من المعالم المجهولة ؛ ليكن $\underline{\varepsilon}$ متجها $n\times1$ من المتغيرات العشوائية غير القابلة للمشاهدة، حيث $E(\underline{\varepsilon}) = 0$ و $Var(\underline{\varepsilon}) = \Sigma$ ، ولنفترض أن هذه المقادير ترتبط بالعلاقة :

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (٥,١)$$

فهذه المواصفات تعرف كما نعلم نموذجا خطيا عاما تامّ الرتبة.

(٢ , ٥) التقدير النقطي لمعالم النموذج (الحالة الأولى)

نظرية (١): ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ محققا لمواصفات التعريف (١) ، ولنفترض إضافة إلى ذلك أن المتجه $\underline{\varepsilon}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$، فعندئذ يكون:

(أ) مقدّر الإمكانية العظمى لمتجه المعالم $\underline{\beta}$ هو $\underline{\hat{\beta}}=(X'X)^{-1}X'\underline{Y}$ ، ومقدر الإمكانية العظمى للتباين σ^2 هو $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n-p}\underline{Y}'(I_n-H)\underline{Y}$ (بعد تعديله ليصبح مقدرا غير منحاز)، حيث $H = X(X'X)^{-1}X'$

(ب) يتوزع $\underline{\hat{\beta}}$ متجه المقدرات وفق التوزيع الطبيعي $N_p\left(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right)$.

ج) يتوزع المتغير $U=\dfrac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ وفق التوزيع كاي مربع بعدد $n\text{-}p$ من درجات الحرية $\chi^2(n\text{-}p)$.

(د) $\underline{\hat{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ مستقلان.

(هـ) $(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\sigma}^2)$ هي إحصاءات كافية بصورة مشتركة للمعالم $(\underline{\beta}, \sigma^2)$.

(و) المقدرات $(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\sigma}^2)$ تامة.

برهان:

(أ) للوصول إلى دالة الإمكانية نكتب دالة الكثافة المشتركة لمقادير العينة Y_1، ... ، Y_n، ونعلم بالفرض أن $\underline{Y} \sim N_n(X\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$ وبالتالي تكون دالة الإمكانية :

$$L\left(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y},X\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)\right\} \qquad (٥, ٢)$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$Log\,L\left(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y},X\right)=-\frac{n}{2}log\,(2\pi)-\frac{n}{2}log\,\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right) \qquad (٥, ٣)$$

$$=-\frac{n}{2}log\,(2\pi)-\frac{n}{2}log\,\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underline{Y}'\underline{Y}-2\underline{\beta}'X'\underline{Y}+\underline{\beta}'X'X\underline{\beta}\right)$$

وفضاء المعالم هو:

$$\Omega = \{(\underline{\beta}, \sigma^2): \sigma^2 > 0 \; ; \; -\infty < \beta_i < +\infty \, , \, i = 1,2,\ldots,p\} \qquad (٥, ٤)$$

وبحل جملة المعادلات $\frac{\partial \log L}{\partial \underline{\beta}} = 0$ و $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0$ نحصل على النقطة $\left(\hat{\underline{\beta}}, \tilde{\sigma}^2\right)$ من فضاء المعالم التي تجعل دالة الإمكانية L أعظم ما يمكن. وباشتقاق طرفي (٣ ، ٥) نجد:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \underline{\beta}} = \frac{2}{2\tilde{\sigma}^2}\left(X'\underline{Y} - X'X\,\hat{\underline{\beta}}\right) = 0 \qquad (٥, ٥)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2\left(\tilde{\sigma}^2\right)^2}\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right) = 0$$

وبحل هذه المعادلات، آخذين في الاعتبار أن $X'X$ مصفوفة $p \times p$ رتبتها بالفرض تساوي p، وبالتالي يمكن حساب معكوسها $(X'X)^{-1}$، نجد:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} \; ; \; \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right) \qquad (٥, ٦)$$

وبتعويض $\hat{\underline{\beta}}$ بما تساويه في عبارة $\tilde{\sigma}^2$ ثم التبسيط نجد:

$$n\tilde{\sigma}^2 = \underline{Y}'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]\underline{Y}$$

وإذا رمزنا للمصفوفة $X(X'X)^{-1}\;X'$ بالرمز H نجد أن H مصفوفة $n \times n$ متناظرة ومتساوية القوى، وبالتالي فإن المصفوفة $I_n - H$ متساوية القوى وهي بوضوح متناظرة أيضا، مما يجعل عبارة $\tilde{\sigma}^2$ كما يلي:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\underline{Y}'(I_n - H)\underline{Y} \qquad (٥, ٧)$$

وبتطبيق القاعدة في (٣ ، ٣٠) متذكرين أن $E(\underline{Y}) = X\underline{\beta}$ نجد:

$$E\left(n\tilde{\sigma}^2\right) = E\left[\underline{Y}'(I_n - H)\underline{Y}\right] = \sigma^2\, tr(I_n - H) + \underline{\beta}'\,X'(I_n - H)\,X\,\underline{\beta}$$

وإذا رمزنا للرتبة بالرمز r وتذكرنا أن رتبة مصفوفة متساوية القوى وأثرها متساويان نجد:

$$tr(I_n - H) = tr(I_n) - tr(H) = n - r\,(X(X'X)^{-1}X') = n - r\,(X'X\,(X'X)^{-1}) = n - r\,(I_p) = n - p \qquad (٥, ٨)$$

وإذا ضربنا المصفوفة $I_n - H$ من اليسار بالمصفوفة X' أو من اليمين بالمصفوفة X فإن الناتج يكون صفرا.

$$X'(I_n - H) = (I_n - H)\,X = 0 \qquad (٥, ٩)$$

وهكذا يكون:

$$E(n\tilde{\sigma}^2) = (n-p)\,\sigma^2$$

أو:

$$E\left(\frac{n\tilde{\sigma}^2}{n-p}\right) = E\left[\frac{1}{n-p}\underline{Y}'(I_n - H)\underline{Y}\right] = \sigma^2 \qquad (٥, ١٠)$$

أي أن $\frac{1}{n-p}\underline{Y}'(I_n - H)\underline{Y}$ مقدر غير منحاز للمعلمة σ^2 وسنرمز لهذا المقدر، وهو مقدر الإمكانية العظمى بعد تعديله ليصبح غير منحاز بالرمز $\hat{\sigma}^2$. وهكذا تكون مقدرات الإمكانية العظمى للمتجه $\underline{\beta}$ وللتباين σ^2 هي:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}\,X'\underline{Y} \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}\underline{Y}'(I_n - H)\underline{Y} \qquad (٥, ١١)$$

(ب) نلاحظ أن $\underline{\hat{\beta}}$ هو من النوع $C\underline{Y}$ حيث $C = (X'X)^{-1}X'$ مصفوفة من الثوابت وبما أن $\underline{Y} \sim N_n\,(X\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$ فيكون توزيع $\underline{\hat{\beta}}$ وفقا للقاعدة المعطاة في النظرية (٣) من الفصل الثاني هو التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي:

$$E(\underline{\hat{\beta}}) = CE(\underline{Y}) = CX\underline{\beta} = (X'X)^{-1}\,X'X\,\underline{\beta} = \underline{\beta} \qquad (٥, ١٢)$$

(لاحظ أن مقدر الإمكانية العظمى للمتجه $\underline{\beta}$ هو مقدر غير منحاز). أما تباين توزيع $\underline{\hat{\beta}}$ فهو:

$$C(\sigma^2 I_n)C' = \sigma^2\,(X'X)^{-1}\,X'X\,(X'X)^{-1} = \sigma^2\,(X'X)^{-1} \qquad (٥, ١٣)$$

(ج) لنرمز للمصفوفة $I_n - H$ بالرمز M فعندئذ نجد:

$$U=\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\underline{Y}'\left(\frac{1}{\sigma^2}M\right)\underline{Y}$$

أي أن المتغير U هو صيغة تربيعية في مركبات المتجه $\underline{Y}$ مصفوفتها $\frac{1}{\sigma^2}M$. وبما أن M مصفوفة متساوية القوى فنجد وفقا للنظرية (٣) من الفصل الثالث أن توزيع U هو توزيع χ^2 اللامركزي بعدد من درجات الحرية يساوي رتبة M ومعلمة لا مركزية $\lambda=\frac{1}{2\sigma^2}(X\underline{\beta})'M(X\underline{\beta})$.

وقد رأينا في (٥, ٨) أن أثر، وبالتالي رتبة $M=I_n-H$ هي $n-p$. ومن الواضح، بالاستفادة من (٥, ٩)أن $\lambda=0$. وهكذا يكون توزيع U هو التوزيع χ^2 المركزي بعدد $(n-p)$ من درجات الحرية.

(د) من (٥, ١١) نجد $\hat{\underline{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ يحققان شروط النظرية (٦) من الفصل الثالث، ذلك لأن:

$$(X'X)^{-1}X'(\sigma^2I_n)(I_n-H)=\sigma^2(X'X)^{-1}(I_n-H)=0$$

بالاستفادة ثانية من العلاقة (٥, ٨). وبالتالي يكون $\hat{\underline{\beta}}$ مستقلا عن $\hat{\sigma}^2$.

(هـ) لنعد إلى دالة الكثافة المشتركة للعينة Y_1، Y_2، ...، Y_n في (٢ , ٥) فيمكن كتابة الصيغة التربيعية في الأس كما يلي:

$$\begin{aligned}(Y-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})&=\left[(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})+X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\right]'\left[(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})+X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\right]\\&=(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})+(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})'X'X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\\&+(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})'X'(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})+(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})'X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\end{aligned}$$

وبالعودة إلى (٥, ٥) ، وعلى وجه الخصوص المعادلات الناظمية $X'\underline{Y}-X'X\hat{\underline{\beta}}=0$ ، نجد أن كلا من الحدين الأخيرين يساوي الصفر، وبالتالي يكون:

$$(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})=(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})+(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})'X'X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})$$

وبملاحظة أن $(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})=n\hat{\sigma}^2=(n-p)\hat{\sigma}^2$ يمكن كتابة:

$$(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})=(n-p)\hat{\sigma}^2+(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})'X'X(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}) \qquad (٥, ١٤)$$

وبالتعويض في (٥, ٢) نجد:

$$L(\underline{Y}, X; \underline{\beta}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-p)\hat{\sigma}^2 + (\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})' X'X(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})\right]\right\}$$

ونلاحظ أن هذه العبارة لا تعتمد على العينة $\underline{Y}$ إلا من خلال، أو بدلالة، الإحصاءات $\underline{\hat{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ ومتذكرين قاعدة التحليل إلى عاملين التي تنص على ما يلي:

لتكن y_1، y_2، ...، y_n عينة من التوزيع $f(y; \underline{\theta})$ حيث $\underline{\theta}$ متجه من المعالم، فالشرط اللازم والكافي ليكون المتجه من الإحصاءات $\underline{t}$ كافيا بصورة مشتركة لمتجه المعالم $\underline{\theta}$ هو أن يكون:

$$f(y_1,\ldots,y_n; \underline{\theta}) = g(\underline{t}; \underline{\theta})\, h(\underline{y}) \qquad (٥, ١٥)$$

حيث لا يعتمد العامل $g(\underline{t}; \underline{\theta})$ على مقادير العينة إلا من خلال مركبات المتجه $\underline{t}$ ولا يعتمد العامل $h(\underline{y})$ على $\underline{\theta}$. نجد أن الإحصاءات $\left(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\sigma}^2\right)$ كافية بصورة مشتركة للمعالم $(\underline{\beta}, \sigma^2)$.

(و) لا نقدم برهانا مفصلا لهذه العبارة ولكننا نذكر باختصار أنه يُبرهن في التحليل الرياضي أن أسرة من الدوال كالأسرة الأسية هي أسرة تامة. وقد رأينا في (ب) و(ج) و(د) أن $\underline{\hat{\beta}}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي وأن $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n-p}\chi^2(n-p)$. وأن $\underline{\hat{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ مستقلان. والتوزيع المشترك للإحصاءات متناسب إذن مع حاصل ضرب التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات بتوزيع χ^2 وكلاهما ينتمي إلى الأسرة الأسية.

وفي ضوء النتيجتان (هـ) و(و) ونظرية ليمان – شيفّه المعروفة في نظرية التقدير النقطي لنخلص في النظرية التالية خواص مثلى لمقدرات الإمكانية العظمى لمتجه المعالم $\underline{\beta}$ والتباين σ^2.

نظرية (٢): ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ محققا لمواصفات التعريف (١)، وأن المتجه $\underline{\varepsilon}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_n(\underline{O}, \sigma^2 I_n)$. لتكن $t(\underline{\beta}, \sigma^2)$ أي دالة في المعالم

$\underline{\beta}$ و σ^2 يوجد لها مقدّر غير منحاز، فعندئذ توجد دالة في مقدرات الإمكانية العظمى $\hat{\underline{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ ولتكن مثلا، $q(\hat{\underline{\beta}},\hat{\sigma})$ تشكل مقدرا غير منحاز أمثل للدالة $t(\underline{\beta}, \sigma^2)$، (ونعني بالأمثل أنه ذو تباين أصغري بانتظام).

وسنوضح الآن تطبيق هذه النظرية من خلال مثال هو النموذج الخطي البسيط.

مثال (١): ليكن النموذج الخطي البسيط.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$
$$E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0} \qquad \underline{\varepsilon} \sim N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n) \qquad (٥, ١٦)$$

فلدينا هنا:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma x_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_i^n x_i \\ \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 \end{bmatrix}, (X'X)^{-1} = \frac{1}{n\sum_i^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix} \Sigma x_i^2 & -\Sigma x_i \\ -\Sigma x_i & n \end{bmatrix}.$$

لنرمز للمقدار $\sum_i^n (x_i - \overline{x})^2$ بالرمز S_{xx} وللمقدار $\sum_i^n (Y_i - \overline{Y})^2$ بالرمز S_{yy} وللمقدار $\sum_i^n (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})$ بالرمز S_{xy}، فتكون مقدرات الإمكانية العظمى لمعالم النموذج كما يلي:

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} = \frac{1}{S_{xx}} \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\overline{Y} \\ \Sigma x_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{S_{xx}} \begin{bmatrix} \overline{Y}\Sigma x_i^2 & - \overline{x}\Sigma x_i Y_i \\ -n\overline{x}\,\overline{Y} & + \Sigma x_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}\Sigma x_i^2 - \overline{x}\Sigma x_i Y_i \\ \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad , \quad \hat{\beta}_0 = \overline{Y}\Sigma x_i^2 - \overline{x}\Sigma x_i Y_i \qquad (٥, ١٧)$$

ويمكن بسهولة تبيان أن $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$ وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.

وبما أن $Var(\underline{\hat{\beta}}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ فلدينا هنا :

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\sigma^2 \overline{x}}{S_{xx}} \quad , \quad Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \Sigma x_i^2}{n S_{xx}}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \qquad (٥, ١٨)$$

ويؤثر اختيار القيم x_i في التباينات والتغاير في (٥, ١٨) ، ولجعل $Var(\hat{\beta}_1)$ أصغر ما يمكن ينبغي أخذ القيم x_i بحيث تجعل S_{xx} أعظم ما يمكن، ولجعل $Var(\hat{\beta}_0)$ أصغر ما يمكن نجعل $\Sigma x_i^2 / S_{xx}$ أصغر ما يمكن. وبما أن $\Sigma x_i^2 / S_{xx} \geq 1$ فإن $Var(\hat{\beta}_0)$ سيكون أصغر ما يمكن بجعل $\overline{x} = 0$ وهذه تجعل التغاير $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = 0$ في الوقت نفسه.

ويمكن تقدير σ^2 بأي من الصيغ التالية :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right) = \frac{1}{n-2}\left(\underline{Y}'\,\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}\,X'Y\right)$$
$$= \frac{1}{n-2}\left(\underline{Y}'\,\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}'}\,X'X\underline{\hat{\beta}}\right)$$

وبالتعويض عن $\underline{\hat{\beta}}$ يمكن بسهولة تبيان أن :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\left[S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right] = \frac{1}{n-2}\left[S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}\right] \qquad (٥, ١٩)$$

مثال (٢): بالعودة إلى المثال (١) أوجد المقدر غير المنحاز الأمثل لكل مما يلي :

١- $5\beta_2$ ، ٢- $2\beta_0$ ، ٣- $\frac{1}{2}\sigma^2$ ، ٤- $2\beta_1 - \beta_0$ ، ٥- $2\beta_1 + 4\sigma^2$

٦- $\beta_1 + 1.96\sigma$ ، ٧- $\beta_0 - 2.58\,\sigma$ ، ٨- β_1 / σ^2

الحل. وفقا للنظرية (٢) يكفي إيجاد مقدر غير منحاز لكل منها بدلالة مقدرات الإمكانية العظمى $\underline{\hat{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ وهكذا نجد بالاستفادة من (٥, ١٧) و (٥, ١٩).

١ - $E(5\hat{\beta}_1) = 5\beta_1$ وبالتالي يكون المقدر غير المنحاز الأمثل للدالة $5\beta_1$ هو :

$$5\hat{\beta}_1 = 5\frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 5\frac{\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

٢ - المقدر غير المنحاز الأمثل هو:

$$2\hat{\beta}_0 = 2(\bar{Y} - \bar{x}\hat{\beta}_1) = 2\bar{Y} - 2\bar{x}\,\frac{\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

٣ - المقدر غير المنحاز الأمثل هو:

$$\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(n-2)}\left[\sum^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{\left(\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

٤ - المقدر غير المنحاز الأمثل هو:

$$2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0 = 2\hat{\beta}_1 - \bar{Y} + \hat{\beta}_1\bar{x} = (2 - \bar{x})\hat{\beta}_1 - \bar{Y}$$

$$= (2 + \bar{x})\frac{\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2} - \bar{Y}$$

٥ - المقدر غير المنحاز الأمثل هو:

$$2\hat{\beta}_1 + 4\hat{\sigma}^2 = 2\frac{\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2} +$$

$$\frac{4}{n-2}\left[\sum^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{\left(\sum^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{\sum^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

٦ - نحتاج هنا إلى مقدر غير منحاز للانحراف المعياري σ. ونعلم من النظرية ١ (جـ) أن $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \chi^2(n-2)$ وأن العزم من المرتبة r للتوزيع $\chi^2(v)$ معطى بالعلاقة $\mu'_r = \frac{2^r\Gamma\left(\frac{1}{2}v + r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}$. وبوضع $r = \frac{1}{2}$ نجد:

$$E\left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}$$

وبالتالي يكون :

$$E(\hat{\sigma})=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n-2}\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\sigma$$

أو :

$$E\left[\frac{\sqrt{n-2}\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\hat{\sigma}\right]=\sigma \qquad (٥, ٢٠)$$

وهكذا يكون المقدر غير المنحاز الأمثل المطلوب :

$$\hat{\beta}_1+1.96\frac{\sqrt{n-2}\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\hat{\sigma}$$

وبالتعويض عن $\hat{\sigma}$ من (٥, ١٩) نجد :

$$\frac{\sum^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})}{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\sum^{n}(Y_i-\bar{Y})^2-\frac{\left(\sum^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})\right)^2}{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

وباستخدام الرموز المختصرة نجد :

$$\frac{S_{xy}}{S_{xx}}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

٧ - المقدر المنحاز الأمثل هو:

$$\hat{\beta}_0-2.58\frac{\sqrt{n-2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\hat{\sigma}$$

$$=\overline{Y}-\overline{x}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}-\frac{2.58\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

٨ - نعلم أن $\hat{\beta}_1$ مستقل عن $\hat{\sigma}^2$ وبالتالي:

$$E\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}^2}\right)=E(\hat{\beta}_1).E\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\right)=\beta_1\,E\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\right)$$

لنحسب الآن $E\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\right)$ وبتعويض $r=-1$ في صيغة μ_r' المعطاة في (٦) نجد:

$$E\left(\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)^{-1}=\frac{2^{-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n-2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}n-2\right)}=\frac{1}{n-4}$$

أو:

$$E(\hat{\sigma}^2)^{-1}=\frac{n-2}{(n-4)\sigma^2}$$

وبالتعويض نجد:

$$E\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}^2}\right)=\frac{(n-2)\beta_1}{(n-4)\sigma^2}$$

وبالتالي:

$$E\left[\frac{(n-4)\hat{\beta}_1}{(n-2)\hat{\sigma}^2}\right]=\frac{\beta_1}{\sigma^2}$$

ويكون المقدر غير المنحاز الأمثل هو:

$$\frac{(n-4)\hat{\beta}_1}{(n-2)\hat{\sigma}^2}=\frac{(n-4)\frac{S_{xy}}{S_{xx}}}{S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}=\frac{(n-4)S_{xy}}{S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2}$$

(٣ , ٥) التقدير النقطي لمعالم النموذج (الحالة الثانية)

ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ محققا لمواصفات التعريف (١)، وسنغفل هنا تحديد أي توزيع بعينه لمتجه الخطأ $\underline{\varepsilon}$، مما يحرمنا من فرصة اللجوء إلى مبدأ الإمكانية العظمى، وسنلجأ، بدلا من ذلك، إلى مبدأ معروف في نظرية التقدير هو مبدأ المربعات الدنيا، ويقضي هذا المبدأ أن نتخذ كتقديرات لمعالم المتجه $\underline{\beta}$ تلك القيم التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$ ، أو $\underline{\varepsilon}'\ \underline{\varepsilon}$ أصغر ما يمكن. ولكن:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}'\ \underline{\varepsilon} &= (\underline{Y} - X\underline{\beta})'\ (\underline{Y} - X\underline{\beta})\\ &= \underline{Y}'\ \underline{Y} - 2\underline{\beta}'\ X'\ \underline{Y} + \underline{\beta}'\ X'X\ \underline{\beta}\end{aligned}$$

وبوضع $\frac{\partial\, \underline{\varepsilon}'\,\underline{\varepsilon}}{\partial\, \underline{\beta}}$ مساويا للصفر نحصل على القيم المطلوبة، وهكذا نجد من جديد المعادلات الناظمية نفسها التي وجدناها عند تطبيق مبدأ الإمكانية وهي:

$$X'X\,\hat{\underline{\beta}} = X'\underline{Y} \qquad (٥, ٢١)$$

ومنها نجد مقدرات المربعات الدنيا:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}\, X'\underline{Y} \qquad (٥, ٢٢)$$

وهو نفس ما وجدناه في (٦ , ٥). ولا غرابة في ذلك إذ أن ما يجعل $\underline{\varepsilon}'\ \underline{\varepsilon}$ أصغر ما يمكن يجعل $e^{-\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}}$ الواردة في دالة الإمكانية في (٢ , ٥) أعظم ما يمكن. ومقدر المربعات الدنيا غير المنحاز للتباين σ^2 مبنيا على مقدرات المربعات الدنيا للمتجه $\underline{\beta}$ هو:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right) \qquad (٥, ٢٣)$$

ذلك ؛ لأن $\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)$ هو في الواقع $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ مجموع مربعات أخطاء العينة حيث نعرف عادة e_i بأنه $e_i = Y_i - \sum_{j=1}^{p} \hat{\beta}_i x_{ij}$ ، $i = 1,\ldots,n$. ومن الطبيعي اتخاذ مجموع مربعات أخطاء العينة $\sum_{1}^{n} e_i^2$ كتقدير لـ $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ الذي يُعتبر بدوره تقديرا لِـ $Var(\varepsilon) = \sigma^2$.

وبما أن توزيع المتجه العشوائي $\underline{\varepsilon}$ غير محدد فسوف يكون من الممكن، بصورة عامة، إثبات أمثلية مقدرات مربعات الدنيا على غرار ما رأيناه في النظرية (٢) بالنسبة لمقدرات الإمكانية العظمى. وسنرى الآن أن مقدرات المربعات الدنيا في (٥, ٢٢) هي المقدرات الأفضل فوق جميع المقدرات غير المنحازة الخطية. ونعني بالمقدر الخطي دالة خطية في مقادير العينة Y_1 ، ... ، Y_n. أي مقدرات من النوع $a_1Y_1+a_2Y_2+\ldots+a_nY_n$ حيث a_1 ، a_2 ، ... ، a_n أعداد ثابتة.

نظرية (٣): (غوص – ماركوف): ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ المذكور في التعريف (١) حيث $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$. فعندئذ يكون مقدر المربعات الدنيا $\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$ المقدر غير المنحاز ذا التباين الأصغر ضمن صف المقدرات الخطية غير المنحازة لمتجه المعالم $\underline{\beta}$.

برهان: ليكن المقدر $\underline{\beta}^* = A\underline{Y}$ ، حيث A مصفوفة $p\times n$ من الثوابت، فسنحدد عناصر A بحيث يكون $\underline{\beta}^*$ مقدرا غير منحاز للمتجه $\underline{\beta}$ وتباينه، من بين جميع المقدرات الخطية غير المنحازة، هو التباين الأصغر. ليكن $A = (X'X)^{-1} X' + B$ حيث $(X'X)^{-1} X'$ معروف ولا بد من تحديد عناصر B بحيث يحقق المقدّر AY ما نريد له أن يحققه، لدينا :

$$E(\underline{\beta}^*) = E(A\underline{Y}) = E[(S^{-1} X' + B)Y] = (S^{-1} X' + B)\, X\,\underline{\beta} = \underline{\beta} + B\,X\,\underline{\beta}$$

ولتحقيق مواصفة عدم الانحياز لابد أن يكون $BX\underline{\beta} = 0$ مهما يكن $\underline{\beta}$ ، أي لا بد أن يكون $BX = 0$. ولتحقيق مواصفة التباين الأصغري يجب اختيار عناصر B بحيث

يكون كل $Var(\beta_i^*)$ ، $i = 1,2,\ldots,p$ أصغر ما يمكن وذلك تحت القيد $BX = 0$. ولهذه الغاية نكتب:

$$Cov(\underline{\beta}^*) = Cov(A\underline{Y}) = A\ Cov(Y)\ A' = \sigma^2\ AA' = \sigma^2\ (S^{-1}X' + B)\ (S^{-1}X' + B)'$$
$$= \sigma^2\ (S^{-1} + BB') = \sigma^2\ (S^{-1} + G)$$

حيث رمزنا للمصفوفة BB' وأبعادها $p\times p$ بالرمز $G = (g_{ij})$. وعناصر القطر الرئيس من مصفوفة التغاير $Cov(\underline{\beta}^*)$ هي، على الترتيب، تباينات المركبات β_i^* ، $i = 1,2,\ldots,p$. ولجعل $Var(\beta_i^*)$ أصغر ما يمكن لكل β_i^* ، يجب أن يكون كل عنصر من عناصر القطر الرئيس لمصفوفة $\sigma^2(S^{-1} + G)$ أصغر ما يمكن. وبما أن σ^2 وS^{-1} ثوابت فينبغي إذن جعل عناصر القطر الرئيس g_{ii} ، $i = 1,\ldots,p$ للمصفوفة G أصغر ما يمكن. ولكن المصفوفة $G = BB'$ مصفوفة موجبة محددة أي أن $g_{ii} > 0$ ، $i = 1,\ldots,p$. وستكون عناصر القطر الرئيس في المصفوفة $Cov(\underline{\beta}^*)$ أصغر ما يمكن إذا أخذنا $g_{ii} = 0$ ، $i = 1,\ldots,p$. ليكن $(B)_{ij} = b_{ij}$ فعندئذ:

$$g_{ii} = (BB')_{ii} = \sum_{j=1}^{p} (B)_{ij}\ (B')_{ji} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\ b_{ij} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}^2$$

و$g_{ii} = 0$ يعني أن مجموع مربعات عناصر السطر i من المصفوفة B يساوي صفرا، وهذا غير ممكن إلا إذا كان جميع عناصر السطر i مساوية للصفر. وهذا يعني بدوره أن $g_{ii} = 0$ لكل i من 1 إلى p يؤدي إلى كون عناصر كل سطر من سطور B مساوية للصفر أي أن $B = 0$. وهذه النتيجة تنسجم مع شرط عدم الانحياز $BX = 0$. وهكذا تكون المصفوفة المطلوبة A هي، في الحقيقة، $A = S^{-1}X'$ ويكون $\underline{\beta}^* = \underline{\hat{\beta}}$ ، وهو المطلوب.

نظرية (٤): تحت النموذج الخطي العام المعطى في النظرية (٣) يكون أفضل تقدير خطي غير منحاز لأي تركيب خطي في المعالم β_i هو التركيب الخطي نفسه في أفضل تقديرات خطية غير منحازة للمعالم β_i. أي أن أفضل تقدير خطي غير منحاز لتركيب خطي $\underline{t}'\ \underline{\beta}$ (حيث $\underline{t}'$ متجه أعداد ثابتة) هو $\underline{t}'\ \underline{\hat{\beta}} = t'S^{-1}X'\underline{Y}$.

برهان*: لنفترض أن $\underline{b}'\ \underline{Y}$ هو أفضل تقدير خطي غير منحاز للتركيب الخطي في المعالم $\underline{\lambda}'\ \underline{\beta}$، حيث $\underline{b}' = (\underline{r}'\ X' + \underline{a}')$، وحيث $\underline{r} = S^{-1}\ \underline{\lambda}$. فيجب تحديد متجه الثوابت $\underline{a}$ بحيث يكون $E(\underline{b}'\ \underline{Y}) = \underline{\lambda}'\ \underline{\beta}$ أولا ويكون $Var(\underline{b}'\ \underline{Y})$ ثانيا أصغر من تباين أي دالة خطية أخرى في المشاهدات y_i، تحقق الشرط الأول وهو شرط عدم الانحياز، وهكذا نجد:

$$E(\underline{b}'\ \underline{Y}) = \underline{b}'\ X\ \underline{\beta} = (\underline{r}'\ X'\ X + \underline{a}'\ X)\ \underline{\beta} = \underline{r}'\ X'X\underline{\beta} + \underline{a}'\ X\ \underline{\beta}$$
$$= \lambda'\ S^{-1}\ S\ \underline{\beta} + a'\ X\ \underline{\beta} = \underline{\lambda}'\ \underline{\beta} + \underline{a}'\ X\underline{\beta}$$

وإذا أردنا للتقدير $\underline{b}'\ \underline{Y}$ أن يكون غير منحاز فلا بد أن يكون $\underline{a}'\ X = 0$. وفيما يتعلق بالتباين لدينا:

$$Var(\underline{b}'\ \underline{Y}) = \underline{b}'\ Var(\underline{Y})\ \underline{b} = \sigma^2\ \underline{b}'\ \underline{b} = \sigma^2\ (\underline{r}'\ X' + \underline{a}')\ (X\underline{r} + \underline{a})$$
$$= \sigma^2\ \underline{\lambda}'\ S^{-1}\ \underline{\lambda} + \sigma^2\ \underline{a}'\ \underline{a}$$

ولجعل $Var(\underline{b}'\ \underline{Y})$ أصغر ما يمكن يجب جعل $\underline{a}'\underline{a} = \sum_{1}^{n} a_i^2$ أصغر ما يمكن، وسيكون الأمر كذلك. إذا وفقط إذا، كان $a_i = 0$، $i = 1,\dots,n$، أي $\underline{a} = 0$ وينسجم هذا مع شرط عدم الانحياز $\underline{a}\ X = 0$. وهكذا يكون $b' = \underline{r}'\ X' = \underline{\lambda}'\ S^{-1}\ X'$، ويكون أفضل تقدير خطي غير منحاز للمقدار $\underline{\lambda}'\ \underline{\beta}$ هو $\underline{b}'\underline{Y} = \lambda' S^{-1}\ X'Y = \lambda'\hat{\underline{\beta}}$. وهو المطلوب.

(٤, ٥)* بعض النتائج الأساسية حول التقدير بتباين أصغري

ليكن $F(y;\ \theta)$ صف التوزيعات الاحتمالية المعرفة على فضاء العينة للمشاهدات $\underline{y}$، مفهرس بالمعلمة θ (يمكن أن تكون θ متجها) التي تأخذ قيمها في فضاء معالم محدد Ω. ليكن U_g صف جميع المقدرات (دوال في y) للدالة $g(\theta)$، وليكن U_0 صف جميع الدوال التي تكون توقعاتها مساوية للصفر. وهكذا يكون المقدر T منتميا إلى U_g إذا وفقط إذا، كان $E(T \mid \theta) = g(\theta)$ لكل $\theta \in \Omega$.

نظرية (٥): الشرط اللازم والكافي كي يكون تباين المقدر $t \in U_g$ أصغريا عند القيمة

$\theta = \theta_0$ ، هو أن يكون $Cov(T, U \mid \theta_0) = 0$ لكل $U \in U_0$ بحيث إن $V(U \mid \theta_0) < \infty$ ، شريطة أن يكون $V(T \mid \theta_0) < \infty$.

برهان: لزوم الشرط. ليكن T مقدرا غير منحاز ذا تباين أصغري للدالة $g(\theta)$، ولنأخذ مقدرا معينا من الصف U_0 ، $U \in U_0$ وقيمة معينة θ من Ω، وليكن $T' = T + \lambda U$ ، حيث λ عدد حقيقي كيفي. فعندئذ يشكل T' مقدرا غير منحاز للدالة $g(\theta)$، وبحيث إن:

$$V(T + \lambda U) \geq V(T) \quad , \quad \forall \lambda \qquad (٥, ٢٤)$$

أو:

$$\lambda^2 V(U) + 2\lambda \, Cov(T, U) \geq 0 \quad , \quad \forall \lambda$$

وجذور هذه الدالة من الدرجة الثانية في λ هي $\lambda = 0$ ، $\lambda = -2 \, Cov(T, U) / V(U)$ ، وبالتالي ستفترض هذه الدالة التربيعية في λ قيما سالبة إذا لم يكن $Cov(T, U) = 0$.

كفاية الشرط. لنفترض أن $Cov(T, U \mid \theta_0) = 0$ لكل $U \in U_0$ ، وليكن T' أي مقدر غير منحاز آخر للدالة $g(\theta)$، بما أن $T - T' \in U_0$ فلدينا:

$$Cov(T, T - T') = E[T(T - T') \mid \theta_0] = 0 \qquad (٥, ٢٥)$$

أي أن $E(T^2) = E(TT')$ ، وبما أن $E(T) = E(T')$ فيمكننا كتابة:

$$E(T^2) - [E(T)]^2 = E(TT') - E(T) \, E(T')$$

أو:

$$V(T) = Cov(T, T')$$

أو:

$$\sqrt{V(T)} = \rho \sqrt{V(T')} \leq \sqrt{V(T')} \qquad (٥, ٢٦)$$

حيث ρ معامل الارتباط بين T و T':

نفترض في البرهان أن التباين والتغاير محسوبان عند القيمة θ_0 للمعلمة θ. وإذا بقي الشرط صحيحا لأي $\theta_0 \in \Omega$ فعندئذ يكون T مقدرا غير منحاز ذا تباين أصغري بانتظام للدالة $g(\theta)$.

تطبيق في النموذج الخطي العام*: لنعتبر الآن النموذج الخطي العام حيث $\underline{Y} \sim N_n(X\underline{\beta};\sigma^2 I_n)$. وليكن $u(\underline{Y}) \in U_0$، أي أن:

$$\int u(\underline{Y})\, exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})\right\} dv \equiv 0 \qquad (٥, ٢٧)$$

وذلك من أجل جميع النقاط في فضاء المعالم. وبقسمة الطرفين على $exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{\beta}'X'X\underline{\beta}\right]$ نجد:

$$\int u(\underline{Y})\, exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{Y}'\underline{Y}+\frac{1}{\sigma^2}\underline{\beta}'X'\underline{Y}\right\} dv \equiv 0 \qquad (٥, ٢٨)$$

وباشتقاق طرفي (٥, ٢٨) بالنسبة إلى β_i، المركبة i من مركبات المتجه $\underline{\beta}$، $i = 1,\dots,p$، نجد:

$$\int u(\underline{Y})(x_{1i}\, y_1+\dots+x_{ni}\, y_n)\; exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{Y}'\underline{Y}+\frac{1}{\sigma^2}\underline{\beta}'X'\underline{Y}\right\} dv \equiv 0 \qquad (٥, ٢٩)$$

وبضرب الطرفين بالمقدار $exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{\beta}'X'X\underline{\beta}\right\}$ يمكننا كتابة:

$$\int u(\underline{Y})\, Q_i\, exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})\right\} dv \equiv 0 \qquad (٥, ٣٠)$$

حيث $Q_i = x_{1i}y_1 + x_{2i}y_2 + \dots + x_{ni}\, y_n$ هو العنصر i من الجداء $X'\underline{Y}$ أي جداء المتجه $\underline{Y}$ بعناصر السطر i من X' أو العمود i من المصفوفة X. و (٥, ٣٠) تعني أن $E[u(\underline{Y})Q_i] \equiv 0$، $i = 1,2,\dots,p$، وبالتالي يكون:

$$E[u(Y)Q_i] \equiv E[u(\underline{Y}).\, \underline{\lambda}'\, X'\, \underline{Y}] \equiv 0 \qquad (٥, ٣١)$$

حيث $\underline{\lambda}'\underline{Q} = \lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2 + \dots + \lambda_pQ_p = \underline{\lambda}'\, \underline{X}'\, \underline{Y}$. ووفقا للنظرية (٥) يكون $\underline{\lambda}'X'\underline{Y}$ مقدرا غير منحاز ذات تباين أصغري لتوقعه $\underline{\lambda}'S\underline{\beta}$. ولكن أيا كان $\underline{\lambda}$ فإن $\underline{\lambda}'X'\underline{Y}$ هو

مقدر المربعات الدنيا للتركيب الخطي في المعالم $\underline{\lambda}' S \underline{\beta}$، وذلك وفقا للنظرية (٤)، وحيث وجدنا أن هذا المقدر هو المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري ضمن صف المقدرات الخطية غير المنحازة. وهكذا نجد أن افتراض التوزيع الطبيعي قد سمح لنا إرساء نتيجة أقوى وهي أن لمقدر المربعات الدنيا تباينا أصغريا ضمن صف أوسع هو صف جميع المقدرات غير المنحازة سواء كانت خطية أم لا. النتيجة التي أشرنا إليها في النظرية (٢) مستفيدين من خاصتي الكفاية والتمام.

(٥ , ٥) التقدير بفترة

لنعد إلى الحالة الأولى في الفقرة (٢ , ٥) حيث افترضنا أن المتجه $\underline{Y}$ في النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N_n(X\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$. فقد وجدنا في النظرية (١) أن $\hat{\underline{\beta}} \sim N_p(\underline{\beta}, S^{-1}\sigma^2)$ وأن $\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$. ويسمح لنا هذا بوضع فترات ثقة للمعالم σ^2، β_1، ...، β_p، ولأي تركيب خطي $\underline{r}'\underline{\beta}$ في مركبات المتجه $\underline{\beta}$، حيث $\underline{r}$ متجه من الثوابت.

(١ , ٥, ٥) التقدير بفترة للتباين σ^2

يمكننا كتابة العبارة الاحتمالية التالية :

$$Pr\left[\chi^2_{\alpha/2} \le \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

حيث χ^2_q هو المئين $100q$ للتوزيع χ^2. ويمكن كتابة هذه العبارة كما يلي :

$$Pr\left[\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right] = 1-\alpha \qquad (٥, ٣٢)$$

أي أن احتمال أن تغطي الفترة العشوائية $\left[\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right]$ القيمة الحقيقية σ^2 للتباين هو $(1-\alpha)$. وعندما نأخذ عينة ونحسب طرفي هذه الفترة نحصل على فترة تسمى $(1-\alpha)$ فترة ثقة للمعلمة σ^2. والتفسير العملي لهذه الفترة هو أننا لو كررنا أخذ عينات حجمها n على التوالي وحسبنا الفترة الناتجة عن كل عينة ففي $100(1-\alpha)$ بالمائة من المرات سنحصل على فترة تتضمن القيمة σ^2.

(٢ , ٥, ٥) التقدير بفترة للمعلمة β_i، $i = 1,\ldots,p$

لنرمز للمصفوفة $(X'X)^{-1} = S^1$ بالرمز C توخيا لسهولة الطباعة، وبما أن $V(\hat{\underline{\beta}}) = \sigma^2 C$ ، فيكون $V(\beta_i) = \sigma^2\ c_{ii}$ ، $i = 1,\ldots,p$. من الواضح أن $u_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{c_{ii}}}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، وهو مستقل عن $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\chi^2(n-p)}{n-p}$. ووفقا لتعريف التوزيع t يكون توزيع $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}$ هو التوزيع t بعدد $n - p$ من درجات الحرية. ويمكننا وضع العبارة الاحتمالية التالية :

$$Pr\left[-t_{\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}} < t_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

حيث $t_{\alpha/2}$ هو المئين $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ للتوزيع t. وهذا يكافئ :

$$Pr\left[\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}} < \beta_i < \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}\right] = 1-\alpha \qquad (٥, ٣٣)$$

وتكون الفترة $\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}$ هي $100(1-\alpha)$ فترة ثقة للمعلمة β_i ، $i = 1,\ldots,p$.

(٣ , ٥, ٥) فترة ثقة لتركيب خطي $\underline{r}'\underline{\beta}$ في المعالم

نعلم أن $\underline{r}'\hat{\underline{\beta}}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $\underline{r}'\underline{\beta}$ وتباين $\underline{r}'V(\hat{\underline{\beta}})\underline{r} = \sigma^2\underline{r}'C\underline{r}$. والخطأ الميعاري لِ $\underline{r}'\hat{\underline{\beta}}$ هو $\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\underline{r}}$ ويكون توزيع

$$t = \frac{\underline{r}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{r}'\underline{\beta}}{\underline{r}'\hat{\underline{\beta}}} = \frac{\underline{r}'\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\,\underline{r}}}$$

هو التوزيع t بعدد $(n\text{-}p)$ من درجات الحرية، مما يسمح لنا كتابة العبارة الاحتمالية:

$$Pr\left[-t_{\alpha/2} \le \frac{\underline{r}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{r}'\underline{\beta}}{\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\,\underline{r}}} \le t_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

أو بصورة مكافئة:

$$Pr\left[\underline{r}'\hat{\underline{\beta}} - t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\underline{r}} \le \underline{r}'\underline{\beta} \le \underline{r}'\hat{\underline{\beta}} + t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\underline{r}}\right] = 1-\alpha \qquad (٥, ٣٤)$$

وتكون الفترة $\underline{r}'\hat{\underline{\beta}} \pm t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{r}'C\underline{r}}$ ، $100(1\text{-}\alpha)\%$ فترة ثقة للتركيب الخطي $\underline{r}'\underline{\beta}$.

(٥ ,٥ , ٤) فترة ثقة للمتوسط $E(Y)$

من عبارة النموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ نلاحظ أن المشاهدة رقم i، من المتجه Y أي Y_i تساوي جداء المتجه $\underline{\beta}$ بعناصر السطر i من المصفوفة X، أي أن $Y_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\,\beta_j + \varepsilon_i$ ، $i = 1,\ldots,n$. وكما نذكر من الفقرة (٢ , ٤) من الفصل الرابع فإن كل سطر من سطور المصفوفة X يقابله مجتمعا من قيم Y، أي أن السطر i، مثلا، يقابله مجتمع من قيم Y متوسطه وفقا للنموذج هو $E(Y_i) = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\,\beta_j$. وهذه ليست إلا تركيبا خطيا في المعالم، وبالمقارنة مع ما وجدناه آنفا حيث $\underline{r} = \underline{x}'_i$ ، و$\underline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2},\ldots,x_{ip})$ هو السطر i من المصفوفة X، ثم تطبيق النتيجة التي حصلنا عليها لحالة تركيب خطي في المعالم نجد هنا أن $100(1\text{-}\alpha)\%$ فترة ثقة للمتوسط $E(Y_i)$ هي:

$$\underline{x}_i\,\hat{\underline{\beta}} \pm t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{x}_i\,C\,\underline{x}'_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,n \qquad (٥, ٣٥)$$

(٥ ,٥ , ٥) فترة تنبؤ

ليكن النموذج الخطي $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$، أخذنا n مشاهدة Y_1، ...، Y_n واستخدمناها لحساب المقدرات $\hat{\underline{\beta}}$ و$\hat{\sigma}^2$. لنأخذ قيمة $(x_{01}, x_{02},\ldots,x_{0p})$ للمتغيرات المستقلة ضمن الساحة التي عرفنا عليها النموذج فهذه القيمة تحدد مجتمعا من القيم لمتغير الاستجابة Y.

اخترنا k من قيم هذا المجتمع ولنرمز لها بالرموز Y_{01} ، Y_{02} ، ... ، Y_{0k} ، وليكن متوسط هذه القيم $\bar{Y}_0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{0j}$ ، وبدلا من وضع فترة ثقة لمتوسط هذا المجتمع من قيم Y وهو $\underline{x}_0$ $\underline{\beta}$ ، حيث يرمز $\underline{x}_0$ للمتجه $(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0p})$ وهو ما تناولناه في الفقرة السابقة، نريد الآن أن نضع فترة نسميها فترة تنبؤ للمتوسط $\bar{Y}_0$. ونسمي الفترة هنا فترة تنبؤ لأنها معنيّة بقيمة متغير عشوائي $\bar{Y}_0$ ، بينما كانت فترات الثقة التي ناقشناها أعلاه معنيّة بقيم معلمة أو تركيب خطي في المعالم.

لنأخذ الآن المتغير $Z = \bar{Y}_0 - \underline{x}_0\,\hat{\underline{\beta}}$. فالقيمة $\underline{x}_0\,\hat{\underline{\beta}}$ هي القيمة التوفيقية لمتغير الاستجابة Y المقابلة للمتجه من القيم $\underline{x}_0$ وهي تعتمد على القيم Y_1 ، ... ، Y_n التي استخدمناها لتقدير $\underline{\beta}$ وσ^2. أما $\bar{Y}_0$ فهي مستقلة عن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ وبالتالي يكون :

$$V(Z)=V(\bar{Y}_0)+V(\underline{x}_0\,\hat{\underline{\beta}})=\frac{V(Y_0)}{k}+\sigma^2\,\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0=\frac{\sigma^2}{k}+\sigma^2\,\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0$$
$$=\sigma^2\left(\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0\right)$$

وبما أن $E(\bar{Y}_0)=E(Y_0)=\underline{x}_0$ فيكون $E(Z) = \underline{x}_0\,\underline{\beta} - \underline{x}_0\,\underline{\beta} = 0$. وتوزيع Z هو التوزيع الطبيعي $N\left[0,\sigma^2\left(\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0\right)\right]$. والخطأ المعياري للمتغير Z هو $\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}$.

والمتغير $\frac{\bar{Y}_0-\underline{x}_0\,\hat{\underline{\beta}}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}}=\frac{Z-0}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}}$ يتوزيع وفق التوزيع t بعدد $(n\text{-}p)$ من درجات الحرية ويمكن وضع العبارة الاحتمالية التالية :

$$Pr\left[-t_{\alpha/2}<\frac{\bar{Y}_0-\underline{x}_0\,\hat{\underline{\beta}}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}}<t_{\alpha/2}\right]=1-\alpha$$

أو :

$$Pr\left[\underline{x}_0\,\underline{\hat{\beta}}-t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}<\overline{Y}_0<\underline{x}_0\,\underline{\hat{\beta}}+t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}\right]=1-\alpha \qquad (٥,٣٦)$$

وتكون فترة التنبؤ بمعامل ثقة $100(1-\alpha)\%$ لقيم المتوسط $\overline{Y}_0$ هي :

$$\underline{x}_0\,\underline{\hat{\beta}}\pm t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{k}+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}$$

وأحيانا يكون المطلوب هو التنبؤ بقيمة مشاهدة واحدة Y مقابلة لِ $\underline{x}_0$، أي $k=1$. وفي هذه الحالة تكون فترة التنبؤ بوضوح هي :

$$\underline{x}_0\,\underline{\hat{\beta}}\pm t_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{1+\underline{x}_0\,C\,\underline{x}'_0}$$

مثال (٣): ليكن النموذج الخطي $Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\varepsilon_i$ ، $i=1,\ldots,5$.
حيث Y_i ثمن بيت معطى بآلاف الدولارات، X_1 عمره بالسنوات، X_2 مساحة البيت المعاشة بآلاف الأقدام المربعة. كانت البيانات كما يلي :

$$\underline{Y}=\begin{bmatrix}50\\40\\52\\47\\65\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&5&1\\1&5&2\\1&10&2\\1&20&3\end{bmatrix}$$

(أ) اكتب النموذج التقديري.

(ب) أوجد أفضل تقدير خطي غير منحاز لمتوسط ثمن البيوت التي عمرها 15 سنة ومساحتها المعاشة 2500 قدما مربعا ، ثم أوجد 95% فترة ثقة لهذا المتوسط.

(ج) أوجد 95% فترة تنبؤ لثمن بيت نختاره عشوائيا من البيوت التي عمرها 15 سنة ومساحتها المعاشة 2500 قدما مربعا.

الحل.

(أ)

$$X'X=\begin{bmatrix}5 & 41 & 9\\ 41 & 551 & 96\\ 9 & 96 & 19\end{bmatrix} \quad , \quad X'\underline{Y}=\begin{bmatrix}254\\ 2280\\ 483\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}2.307551 & 0.1565378 & -1.88398\\ 0.1565378 & 0.02578269 & -0.20442\\ -1.88398 & -0.20442 & 1.977901\end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\beta}}=(X'X)^{-1}X'\underline{Y}=\begin{bmatrix}33.06\\ -0.189\\ 10.718\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix}$$

ويكون النموذج التقديري :

$$Y=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_1+\hat{\beta}_2X_2+e$$
$$=33.06-0.189\,X_1+10.718\,X_2+e$$

(ب) $$\widehat{E(Y)}=\widehat{r'\underline{\beta}}=r'\underline{\hat{\beta}}=[1\ \ 15\ \ 2.5]\underline{\hat{\beta}}$$

$$\hat{\beta}_0+15\hat{\beta}_1+2.5\hat{\beta}_2=33.06-0.189\,(15)+10.718\,(2.5)=57.02$$

أي أن متوسط ثمن المبيع المقدَّر لمثل هذه البيوت هو 57020 دولارا.

ولحساب فترة الثقة نحتاج إلى $\hat{\sigma}^2$ أي :

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5-3}\left[\underline{Y'}\,\underline{Y}-\underline{\hat{\beta}'}\,X'\underline{Y}\right]=48.837937\,,\hat{\sigma}=6.99$$

وبتطبيق (٥,٣٥) حيث $\underline{x}_i=(1\ \ 15\ \ 2.5)$ نجد :

$$\underline{x}_i\,C\,\underline{x}'_i=\underline{x}_i\,(X'X)^{-1}\,\underline{x}'_i=[1\ \ 15\ \ 2.5](X'X)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 15\\ 2.5\end{bmatrix}=0.415$$

وفترة الثقة المطلوبة، حيث $t_{.025,2} = 4.303$ هي :

$$57.02 \pm 4.303(6.99)\sqrt{0.415}$$

أو :

$$57.02 \pm 19.376$$

أي أنه يمكننا القول بمعامل ثقة 95% إن متوسط ثمن مبيع بيت عمره 15 سنة ومساحته 2500 قدما مربعا يقع بين 37644 دولارا و76396 دولارا. وطبعا فترة الثقة متسعة جدا وهذا يعود إلى أن العينة المأخوذة في المثال صغيرة جدا $n = 5$ مشاهدات. فالغاية هنا توضيح تقنية الحسابات.

ج) بتطبيق (٥, ٣٦) حيث $k = 1$ نجد الفترة :

$$57.02 \pm 4.303(6.99)\sqrt{1 + 0.415} = 57.02 \pm 35.78$$

أي أنه يمكننا القول بمعامل ثقة 95% إن ثمن مبيع بيت اخترناه عشوائيا من البيوت التي عمرها 15 سنة ومساحتها 2500 قدما مربعا يقع بين 21240 دولارا و92800 دولارا. وكما هو متوقع فإن الفترة هنا أعرض من الفترة التي وجدناها في (ب).

(٥ , ٦) اختبار الفرضيات

سنطبق اختبار نسبة الامكانية المعمم لاختبار الفرضية الخطية العامة $H_0{:}H\underline{\beta} = \underline{h}$ مقابل $H_1{:}H\underline{\beta} \neq \underline{h}$ حيث H مصفوفة $q \times p$ رتبتها q، $(q \leq p)$، و$\underline{h}$ متجه من الثوابت. وسنستعرض قبل ذلك حالة خاصة تحدد فيها الفرضية H_0 قيما معينة لجزء من المعالم ونترك ما بقي منها مغفلا. ثم نطبق هذه الحالة الخاصة عندما تكون القيم التي تحددها H_0 مساوية للصفر نظرا لأهميتها في التحليل الإحصائي.

(٥ ,٦ , ١) حالة خاصة

ليكن النموذج الخطي $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ كما عرفناه في النظرية (١)، حيث يتوزع المتجه $\underline{Y}$ وفق التوزيع الطبيعي $N_n(X\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$. فعندئذ تتخذ دالة الإمكانية الشكل التالي :

$$L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y},X)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})} \tag{٥, ٣٧}$$

ونريد اختبار الفرضية $H_0:\beta_1=\beta_1^*,\ldots,\beta_r=\beta_r^*$ حيث β_i^* ، $i=1,\ldots,r$ قيم ثابتة محددة مع ترك المعالم الباقية β_{r+1} ، ... ، β_p مغفلة. لنقل إننا جزأنا المتجه $\underline{\beta}$ إلى جزأين $\underline{\beta}'=\left(\underline{\gamma}'_1 \middle| \underline{\gamma}'_2\right)$ حيث $\underline{\gamma}'_1=(\beta_1,\ldots,\beta_r)$ و $\underline{\gamma}'_2=(\beta_{r+1},\ldots,\beta_p)$. وتصبح الفرضية $H_0:\underline{\gamma}_1=\underline{\gamma}_1^*$ حيث $\underline{\gamma}_1^*=\left(\beta_1^*,\ldots,\beta_r^*\right)$. وبتجزئة المصفوفة X وفقا لذلك نكتب النموذج في شكله المجزأ كما يلي:

$$\underline{Y}=\times\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}=X_1\underline{\gamma}_1+X_2\underline{\gamma}_2+\underline{\varepsilon}=(X_1|X_2)\begin{pmatrix}\underline{\gamma}_1\\ \underline{\gamma}_2\end{pmatrix}+\underline{\varepsilon} \tag{٥, ٣٨}$$

حيث X_1 مصفوفة تتضمن الأعمدة الـ r الأولى من X. ويتخذ النموذج المخفض، وهو النموذج في شكله المجزأ بعد أن نفرض عليه معطيات الفرضية H_0 ، كما يلي:

$$\underline{Y}=X_1\,\underline{\gamma}_1^*+X_2\underline{\gamma}_2+\underline{\varepsilon}$$

لنرمز للفرق $\underline{Y}-X_1\underline{\gamma}_1^*$ بالرمز $\underline{T}$ فيصبح النموذج المخفض على الشكل:

$$\underline{T}=X_2\underline{\gamma}_2+\underline{\varepsilon} \tag{٥, ٣٩}$$

حيث يتوزع المتجه $\underline{T}$ وفق التوزيع الطبيعي $N_n(X_2\underline{\gamma}_2,\ \sigma^2 I_n)$. ولدينا الآن فضاء المعالم غير المقيد Ω حيث:

$$\Omega=\{(\beta_1,\ldots,\beta_p,\ \sigma^2)\}\ \left|-\infty<\beta_i<+\infty,\ i=1,\ldots,p;\ \sigma^2>0\right\}$$

وكما رأينا سابقا فإن مقدرات الإمكانية العظمى للمتجه $\underline{\beta}$ وللتباين σ^2 فوق هذا الفضاء هي:

$$\hat{\underline{\beta}}=(X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$

$$n\hat{\sigma}^2=(\underline{Y}-X\,\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\,\hat{\underline{\beta}})=\underline{Y}'[I_n-X(X'X)^{-1}X']\underline{Y}=\underline{Y}'A\underline{Y}$$

حيث $A = I_n - X(X'X)^{-1}X'$ مصفوفة متناظرة ومتساوية القوى. وبتعويض هذه القيم في عبارة دالة الإمكانية العظمى (٥, ٣٧) نحصل على أعلى قيمة لهذه الدالة (أصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$) فوق الفضاء غير المقيد Ω وهي:

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{n^{n/2}\, e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left[(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})\right]^{\frac{n}{2}}} \qquad (٥, ٤٠)$$

وإذا فرضنا الآن على الفضاء Ω معطيات الفرضية H_0، أي قيّدنا الفضاء Ω بما يتفق مع الشروط التي تضعها H_0 فسنحصل على فضاء المعالم المقيد وسنرمز له بالرمز w حيث:

$$w = \{(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_p, \sigma^2)\} \;\big|\, -\infty < \beta_i < +\infty,\ \sigma^2 > 0\}$$

ونلاحظ أن الفضاء Ω ذو $p + 1$ من الأبعاد بينما يقتصر الفضاء w على $p+1-r$ بعدا. ودالة الإمكانية المعرفة على الفضاء w هي:

$$L(\underline{\gamma}_2, \sigma^2; \underline{T}, X_2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{T} - \underline{X}_2\underline{\gamma}_2)'(\underline{T} - \underline{X}_2\underline{\gamma}_2)} \qquad (٥, ٤١)$$

وبحساب مقدرات الإمكانية العظمى لمتجه المعالم $\underline{\gamma}_2$ وللتباين σ^2 نجد:

$$\hat{\underline{\gamma}}_2 = (X_2'X_2)^{-1} X_2'\underline{T} \qquad (٥, ٤٢)$$

$$n\hat{\sigma}^2 = (\underline{T} - X_2\hat{\underline{\gamma}}_2)'(\underline{T} - X_2\hat{\underline{\gamma}}_2) = \underline{T}'[I_n - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2']\underline{T} = \underline{T}'A_2\,\underline{T}$$

حيث $A_2 = I_n - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$ مصفوفة متناظرة ومتساوية القوى، وبتعويض هذه القيم في (٥, ٤١) نحصل على أعلى قيمة لدالة الإمكانية (أصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$) فوق الفضاء المقيد w وهي:

$$L(\hat{w}) = \frac{n^{n/2}\, e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left[(\underline{T} - X_2\hat{\underline{\gamma}}_2)'(\underline{T} - X_2\hat{\underline{\gamma}}_2)\right]^{n/2}} \qquad (٥, ٤٣)$$

ونسبة الإمكانية λ، وفقا لما نعلمه من اختبار نسبة الإمكانية المعمم، هي:

$$\lambda = \frac{L(\hat{w})}{L(\hat{\Omega})} = \left[\frac{\left(\underline{T} - X_2\underline{\hat{\gamma}}_2\right)'\left(\underline{T} - X_2\underline{\hat{\gamma}}_2\right)}{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}\right]^{-n/2} = \left[\frac{Q_0 + Q_1}{Q_0}\right]^{-n/2} = \left[1 + \frac{Q_1}{Q_0}\right]^{-n/2} \qquad (٥, ٤٤)$$

حيث رمزنا لأصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ فوق Ω وهي $\left(\underline{Y} - X_2\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X_2\underline{\hat{\beta}}\right)$ بالرمز Q_0 ورمزنا لأصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ فوق w وهي $\left(\underline{T} - X_2\underline{\hat{\gamma}}_2\right)'\left(\underline{T} - X_2\underline{\hat{\gamma}}_2\right)$ بالرمز $Q_0 + Q_1$ للتذكير بأنها أكبر أو تساوي Q_0 كما ينبغي لها أن تكون، طالما أن أصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ (أو أكبر قيمة لدالة الإمكانية) فوق الفضاء الجزئي w يجب أن لا تتجاوز أصغر قيمة لِ $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ (أو أكبر قيمة لدالة الإمكانية) فوق الفضاء الكلي Ω.

نذكر من (٥, ٩) أن $X'A = AX = 0$ ويكتابة X بالشكل المجزأ نستنتج بسهولة أن:

$$X_1' A = A X_1 = 0 \quad , \quad X_2' A = A X_2 = 0 \qquad (٥, ٤٥)$$

ويمكننا الآن التعبير عن Q_0 بدلالة المتجه $\underline{T}$ بدلا من المتجه $\underline{Y}$ فنكتب:

$$Q_0 = \underline{Y}' A \underline{Y} = \left(Y - X_1\underline{\gamma}_1^*\right)' A \left(Y - X_1\underline{\gamma}_1^*\right) = \underline{T}' A \underline{T} \qquad (٥, ٤٦)$$

وذلك بالاستفادة من (٥, ٤٥).

وباستخدام النتيجة (١) من الفصل الثالث والعلاقة (٥, ٤٥)نجد أن توزيع الصيغة التربيعية $\frac{Q_0}{\sigma^2} = \underline{T}'\frac{A}{\sigma^2}\underline{T}$ هو التوزيع $\chi^2(n\text{-}p)$ ومعلمة لا مركزية $\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}E(\underline{T}')AE(\underline{T}) = 0$. وكنا رأينا في (٥, ٨) أن رتبة A هي $n\text{-}p$.

ويمكن بسهولة تبيان أن $A_2 A = AA_2 = A$ وأن $A_2\text{-}A$ مصفوفة متساوية القوى (تركنا ذلك كتمرين للطالب). لنكتب الآن المطابقة:

$$\begin{aligned} \underline{T}'\,\underline{T} &= \underline{T}'A\,\underline{T} + \underline{T}'\,(A_2 - A)\,\underline{T} + \underline{T}'\,(I_n - A_2)\,\underline{T} \\ &= Q_0 \quad + \quad Q_1 \quad + \quad Q_2 \end{aligned} \qquad (٥, ٤٧)$$

وبالعودة مجددا إلى النتيجة (١) من الفصل الثالث نجد أن توزيع $\frac{Q_1}{Q_2}$ هو التوزيع $\chi'^2(r, \lambda_2)$ كاي مربع اللامركزي بعدد من درجات الحرية r هو رتبة $A_2 - A$:

$$\begin{aligned} r(A_2 - A) &= tr(A_2 - A) = tr(A_2) - tr(A) = r(A_2) - r(A) \\ &= r[I_p] - r[I_{p\text{-}r}] = p - (p - r) = r \end{aligned} \qquad (٥, ٤٨)$$

ومعلمة اللامركزية λ_2 هي :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} E(\underline{T}')(A_2 - A)E(\underline{T})$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1^*)'[X_1'\ X_1 - X_1'\ X_2(X_2'X_2)^{-1}\ X_2'X_1](\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_1^*)$$

أو :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_1^*)'B(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_1^*) \qquad (٥, ٤٩)$$

حيث $B = X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1$ مصفوفة موجبة محددة. وهذا يعني أن $\lambda_2 = 0$ إذا وفقط إذا كانت H_0 صحيحة أي إذا وفقط إذا كان $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_1^*$.

لنعرّف الآن المتغير $u = \frac{Q_1}{r} \div \frac{Q_0}{n-p} = \frac{Q_1}{Q_0}\frac{n-p}{r}$ أو $\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{r}{n-p}u$ ، وبالتعويض في (٥, ٤٤) نجد :

$$\lambda = \left[1 + \frac{r}{n-p}u\right]^{-n/2} \qquad (٥, ٥٠)$$

وبما أن Q_0 وQ_1 مستقلان ؛ لأن :

$$A(A_2 - A) = A\ A_2 - A\ A = A - A = 0$$

فيكون توزيع u هو توزيع إف اللامركزي $F'(r, n\text{-}p; \lambda_2)$. ويصبح توزيع النسبة u توزيع إف المركزي $F(r, n-p)$ إذا وفقط إذا كانت H_0 صحيحة.

ومنطقة الرفض كما نعلم من اختبار نسبة الإمكانية المعمم هي منطقة القيم الصغيرة للنسبة λ. أي $0 < \lambda \leq a$ حيث يتحدد الثابت a بحجم الخطأ من النوع الأول α. ولكن عندما تتغير النسبة λ بين الصفر والواحد تتغير النسبة u بين الصفر واللانهاية، والقيم الصغيرة لِ λ أي $0 < \lambda < a$ تقابلها قيم كبيرة للمتغير u أي $F_\alpha \leq u < \infty$ حيث F_α هو المئين $100(1\text{-}\alpha)$ لتوزيع F المركزي بعدد r من درجات الحرية في البسط و$n\text{-}p$ من درجات الحرية في المقام. وتصبح قاعدة الاختبار الآن واضحة إذ نحسب $u = \frac{n-p}{r}\frac{Q_1}{Q_0}$

وإذا وقعت u ضمن منطقة الرفض، أي إذا كان $u \geq F_\alpha(r; n\text{-}p)$ نرفض H_0 وفيما عدا ذلك لا نرفضها.

ولحساب قوة هذا الاختبار نحسب احتمال رفض H_0 علما أن H_1 هي الفرضية الصحيحة، ولكن تحت الفرضية H_1 يكون توزيع المتغير u هو توزيع إف اللامركزي $F'(r, n\text{-}p; \lambda_2)$ وبالتالي تكون القوة هي:

$$\int_{F\alpha}^{\infty} g(u')\, du' = 1 - \int_{0}^{F\alpha} g(u')\, du' \qquad (٥, ٥١)$$

حيث $g(u')$ هي دالة كثافة المتغير u' أي دالة إف اللامركزي $F'(r, n\text{-}p; \lambda_2)$، وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية:

نظرية (٦): ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ المعرف في النظرية ١. ولنجزئ المتجه $\underline{\beta}$ كما يلي:

$\underline{\beta}' = \left(\underline{\gamma}'_1 \middle| \underline{\gamma}'_2\right)$ حيث يتضمن المتجه γ_1 المعالم الـ r الأولى β_1، ...، β_r، ولنجزئ النموذج وفقا لذلك كما يلي:

$$\underline{Y} = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \underline{\varepsilon}$$

لاختبار الفرضية $H_0: \underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_1^*$ ضد البديل $H_0: \underline{\gamma}_1 \neq \underline{\gamma}_1^*$ وفقا لاختبار نسبة الإمكانية المعمم نقوم بما يلي:

١- نحسب القيمة العظمى لدالة الإمكانية (القيمة الصغرى لِ $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\varepsilon}'$) بالنسبة للمعالم في النموذج التام $\underline{Y} = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \underline{\varepsilon}$، ولنرمز لهذه القيمة بالرمز Q_0.

٢- نحسب القيمة العظمى لدالة الإمكانية (القيمة الصغرى لِ $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\varepsilon}'$) بالنسبة للمعالم في النموذج المخفض $\underline{Y} = X_1\underline{\gamma}_1^* + X_2\underline{\gamma}_2 + \underline{\varepsilon}$، ولنرمز لهذه القيمة بالرمز $Q_0 + Q_1$.

٣- ليكن $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$ حيث $Q = \left(\underline{Y} - X_1\underline{\gamma}_1^*\right)'\left(\underline{Y} - X_1\underline{\gamma}_1^*\right)$ عندئذ يتوزع المتغير $u = \frac{n-p}{r}\frac{Q_1}{Q_0}$ وفق توزيع إف اللامركزي $F'(r, n\text{-}p; \lambda_2)$ بمعلمة لا مركزية: $\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1^*)' B(\underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1^*)$.

حيث $B = X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1$. ويصبح توزيع u هو توزيع إف المركزي $F(r, n\text{-}p)$ إذا وفقط إذا كانت H_0 صحيحة أي إذا وفقط إذا كان $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_1^*$.

٤- نحسب $u = \frac{n-p}{r}\frac{Q_1}{Q_0}$ ونرفض الفرضية H_0 إذا كان $u \geq F_\alpha(r, n\text{-}p)$ حيث F_α هو المئين $100(1\text{-}\alpha)$ لتوزيع إف المركزي بعدد r و $n\text{-}p$ من درجات الحرية.

(٥ ,٦ ,٢) جدول تحليل التباين (التحاين) للحالة $H_0: \gamma_1 = 0$

في هذه الحالة الأخص نحسب Q_0 القيمة الصغرى لمجموع مربعات الأخطاء $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ فوق فضاء المعالم غير المقيد، أي باستخدام النموذج $\underline{Y} = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \underline{\varepsilon}$ فنجد:

$$Q_0 = \underline{Y}'A\underline{Y} = \underline{Y}'(I_n - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y} = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'X\hat{\underline{\beta}} \tag{٥, ٥٢}$$
$$= SST - R(\underline{\beta}) = SST - SSR$$

حيث يرمز SST لمجموع المربعات الكلي (غير المصحح) ويرمز SSR أو $R(\underline{\beta})$ للتخفيض العائد للنموذج التام، و $\hat{\underline{\beta}}$ حلول المعادلات الناظمية تحت النموذج التام. كما نحسب:

$$Q_1 = \underline{Y}'(A_2 - A)\underline{Y} = \underline{Y}'X(X'X)^{-1}X'\underline{Y} - \underline{Y}'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\underline{Y} \tag{٥, ٥٣}$$
$$= \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} - \hat{\gamma}_2'X_2'\underline{Y} = R(\underline{\beta}) - R(\underline{\gamma}_2) = R(\gamma_1|\gamma_2)$$

حيث $\hat{\underline{\gamma}}_2$ هو حلول المعادلات الناظمية تحت النموذج المخفض، $\underline{Y} = X_2\gamma_2 + \underline{\varepsilon}$، و$R(\gamma_2)$ هو التخفيض العائد إلى النموذج المخفض أو التخفيض العائد إلى γ_2 متجاهلين γ_1. و $R(\gamma_1 | \gamma_2)$ هو التخفيض العائد إلى γ_1 معدلة من أجل γ_2.

ونلخص هذه المعلومات في جدول تحليل التباين (التحاين) التالي:

جدول التحاين لاختبار الفرضية $H_0: \underline{\gamma}_1 = \underline{0}$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	النسبة F
المجموع الكلي	$\underline{Y}'\underline{Y} = \sum_{i}^{n} Y_i^2$	n		
يعود إلى $\underline{\beta}$	$\hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y}$	p		
يعود إلى $\underline{\gamma}_2$ متجاهلين $\underline{\gamma}_1$	$\hat{\underline{\gamma}}'_2 X'_2 \underline{Y}$	$p-r$		
يعود إلى $\underline{\gamma}_1$ معدلة من أجل $\underline{\gamma}_2$	$\hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} - \hat{\underline{\gamma}}'_2 X'_2 \underline{Y} = Q_1$	r	Q_1/r	$\frac{n-p}{r}\frac{Q_1}{Q_0}$
الخطأ	$\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} = Q_0$	$n-p$	$Q_0/(n-p)$	

مثال (٤):المسافة التي تقطعها نقطة مادية D^* معطاة نظريا بالنموذج:

$$D^* = \beta_0 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2$$

حيث يقيس T_1 الزمن الذي تتحركه النقطة ويقيس T_2 درجة حرارة المحيط الذي تتحرك فيه النقطة. ويمكن قياس الزمن أو درجة الحرارة عملياً بدون خطأ، ولكن بدلا من مشاهدة D^* فإننا نشاهد $Y = D^* + \varepsilon$ حيث ε متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ^2. أخذنا الجملة التالية من القياسات:

Y	6.0	13.0	13.0	29.2	33.1	32.0	46.2	117.5
T_1	1	2	2	4	5	6	8	20
T_2	10	10	10	11	14	15	18	30

(أ) أوجد أفضل تقدير خطي غير منحاز للمعالم واكتب النموذج التقديري.

(ب) اختبر الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = 0$

الحل:

(أ) لدينا:

$$\underline{Y}'\underline{Y} = 19286.9,\ X'X = \begin{bmatrix} 8 & 49 & 120 \\ 49 & 555 & 1014 \\ 120 & 1014 & 2110 \end{bmatrix},\ X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 290.0 \\ 3264.9 \\ 5967.2 \end{bmatrix}$$

المعادلات الناظمية من (٢١ , ٥) هي :

$$8\hat{\beta}_0 + 49\hat{\beta}_1 + 120\hat{\beta}_2 = 290.0$$
$$49\hat{\beta}_0 + 555\hat{\beta}_1 + 1014\hat{\beta}_2 = 3264.9$$
$$120\hat{\beta}_0 + 1041\hat{\beta}_1 + 2110\hat{\beta}_2 = 5967.2$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 22.79 \\ 8.79 \\ -2.69 \end{bmatrix},\ \hat{D}^* = 22.79 + 8.79T_1 - 2.69T_2$$

ولتقدير σ^2 واختبار الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = 0$ نقيم جدول تحليل التباين. ولهذه الغاية نحسب المقادير التالية :

$$\hat{\beta}'X'\underline{Y} = (22.79)(290.0) + (8.79)(3264.9) - (2.69)(5967.2)$$
$$= 19240.5$$

لنضع $\underline{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ و $\underline{\gamma}_2 = \beta_0$ ، فالنموذج المخفّض هو $Y = \beta_0 + \varepsilon$ ، (وضعنا $\beta_1 = \beta_2 = 0$ في النموذج المفترض). والمعادلات الناظمية للنموذج المخفض هي :

$$8\hat{\beta}_0 = 290.0$$

ومنه :

$$\underline{\hat{\gamma}}_2 = \hat{\beta}_0 = 290.0/8 = 36.3$$

وبالتالي :

$$\underline{\gamma}'_2 X'_2 \underline{Y} = (290.0)^2/8 = 10512.5$$
$$Q_1 = \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y} - \underline{\hat{\gamma}}'_2 X'_2 \underline{Y} = 8743.3$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{46.4}{8-3}=9.28$$ الخطأ، ويكون $\underline{Y}'\underline{Y}-\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}=19286.9-19240.5=46.4$

ويكون جدول تحليل التباين كالتالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	النسبة F
المجموع الكلي	19286.9	8		
يعود إلى $\underline{\beta}$	19240.5	3		
يعود إلى γ_2 (متجاهلين γ_1)	10512.5	1		
يعود إلى γ_1 معدلة من أجل γ_2	8728.0	2	4364.0	470.3
الخطأ	46.4	5	$\hat{\sigma}^2=9.28$	

وبما أن $F_{2,5}=13.247$ عند مستوى الأهمية $\alpha=.01$ وأن $470.3>13.247$ فإننا نرفض الفرضية $\beta_1=\beta_2=0$. ومن الواضح أن الفرضية مرفوضة حتى عند مستويات أهمية أقل بكثير.

(٣ , ٦, ٥)اختبار الفرضية الخطية العامة

الفرضية الخطية العامة هي فرضية من النوع $H_0: H\underline{\beta}=\underline{h}$ مقابل $H_0: H\underline{\beta}\neq\underline{h}$ حيث H مصفوفة $q\times p$ من الثوابت $(q\leq p)$، ورتبتها q. أي أن السطور في H مستقلة بعضها عن بعض ورتبة HH' بالتالي هي q ومعكوس HH' موجود. وحيث $\underline{h}$ متجه من الثوابت ويمكن صياغة أي فرضية حول المعالم $\underline{\beta}$ مما نتعرض له عادة في التطبيق العملي وفقا للصيغة $H\underline{\beta}=\underline{h}$، فهي أعم بكثير مما تبدو لنا للوهلة الأولى ونوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٥): ليكن النموذج الخطي العام:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}+\beta_4x_{i4}+\varepsilon_i,\ \ i=1,\ldots,n$$

والمطلوب وضع الفرضيات التالية وفق الصيغة $H\underline{\beta}=\underline{h}$.

(أ) $\beta_1 = \beta_2$ (ب) $\beta_1 = \beta_2$ و $\beta_3 = \beta_4$ (ج) $\beta_1 = \beta_2 = 6$ (د) $\beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ ، (هـ) $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ (و) $\beta_1 - 2\beta_2 = 4\beta_3$ و $\beta_1 + 2\beta_2 = 6$.

الحل. أ) $H = (0, 1, -1, 0, 0)$ ، $\underline{h} = \underline{0}$.

(ب) $H = \begin{bmatrix} 0,1,-1,0,0 \\ 0,0,0,1,-1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{h} = \underline{0}$.

(ج) $H = (0, 1, -1, 0, 0)$ ، $h = 6$.

(د) $H = (\underline{0} \,|\, I_4)$ ، $\underline{h} = 0$.

(هـ) $H = \begin{bmatrix} 1,0,0,0,-1 \\ 0,1,0,0,-1 \\ 0,0,1,0,-1 \\ 0,0,0,1,-1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{h} = \underline{0}$.

(و) $H = \begin{bmatrix} 0,1,-2,-4,0 \\ 0,1,2,0,0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

نظرية (٧): لاختبار الفرضية الخطية العامة $H_0: H\underline{\beta} = \underline{h}$ مقابل $H_1: H\underline{\beta} \neq \underline{h}$ في النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$، المعرف في النظرية ١ ، حيث H مصفوفة من الثوابت $q \times p$ $(q \leq p)$ رتبتها q و$\underline{h}$ متجه من الثوابت. نأخذ إحصاء الاختبار.

$$W = \frac{(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})}{\underline{Y}'[I_n - X(X'X)X']\underline{Y}} \cdot \frac{n-p}{q} \qquad (٥, ٥٤)$$

وهذا الإحصاء يتوزع وفق توزيع إف اللامركزي $F'(q,n\text{-}p;\ \lambda)$ حيث معلمة اللامركزية :

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(H\underline{\beta} - \underline{h})'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\underline{\beta} - \underline{h}) \qquad (٥, ٥٥)$$

و$\lambda = 0$ إذا ، وفقط إذا ، كانت H_0 صحيحة ، ولاختبار H_0 نحسب W ونرفض H_0 إذا كان $W \geq F_\alpha(q, n\text{-}p)$ حيث $F_\alpha(q, n\text{-}p)$ هو المئين $100(1\text{-}\alpha)$ لتوزيع F المركزي بعدد q و$n\text{-}p$ من درجات الحرية وقوة هذا الاختبار هي :

$$\pi(\lambda) = \int_{F_{\alpha}(q,n-p)}^{\infty} f'(w';q,n-p;\lambda)\,dw$$

حيث f' دالة الكثافة لتوزيع إف اللامركزي بعدد q و$n\text{-}p$ من درجات الحرية ومعلمة لا مركزية λ.

برهان*. سنستخدم اختبار نسبة الإمكانية المعمم فنحسب:

$$v(\underline{y}) = \frac{\max\limits_{(\beta,\sigma^2)\in w} L(\beta,\sigma^2;y)}{\max\limits_{(\underline{\beta},\sigma^2)\in\Omega} L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{y})}$$

$$= L(\hat{w}) / L(\hat{\Omega}) \qquad (٥,٥٦)$$

حيث Ω فضاء المعالم غير المقيّد وw فضاء المعالم المقيّد كما عرفناهما في بداية الفقرة. وقد رأينا في (٥ , ٤٠) أن:

$$L(\hat{\Omega}) = (2\pi)^{-n/2}\,(\hat{\sigma}^2_{\Omega})^{-n/2}\,e^{-n/2} \qquad (٥,٥٧)$$

ولحساب $L(\hat{w})$ سنستخدم طريقة مضاريب لاغرانج فنكتب:

$$\log L = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta}) - \underline{\lambda}'(H\underline{\beta}-\underline{h})$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \underline{\beta}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2}(2X'X\tilde{\underline{\beta}} - 2X'\underline{Y}) - H'\tilde{\underline{\lambda}} = 0 \qquad (٥,٥٨)$$

حيث $\tilde{\underline{\beta}}$ و $\tilde{\sigma}^2$ يرمزان لمقدري الإمكانية العظمى لِـ$\underline{\beta}$ وσ^2 فوق الفضاء المقيّد w.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{2}\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2(\tilde{\sigma}^2)^2}(\underline{Y}-X\tilde{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\tilde{\underline{\beta}}) = 0 \qquad (٥,٥٩)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \underline{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow H\tilde{\underline{\beta}} - \underline{h} = 0 \qquad (٥,٦٠)$$

لنرمز للمقدار $\tilde{\underline{\lambda}}\,\tilde{\sigma}^2$ بالرمز $\underline{\lambda}^*$ فنجد من (٥,٥٨) أن:

$$\tilde{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underline{Y} - H'\underline{\lambda}^*) = \hat{\underline{\beta}} - (X'X)^{-1}H'\underline{\lambda}^* \qquad (٥,٦١)$$

حيث $\hat{\underline{\beta}}$ وσ^2 حيثما وردتا هما مقدرا الإمكانية العظمى للمعالم $\underline{\beta}$ وσ^2 فوق الفضاء غير المقيد Ω. ومن (٥,٦٠) و (٥,٦١) نجد، مستخدمين C كرمز للمعكوس $(X'X)^{-1}$:

$$H\tilde{\beta} = H\hat{\underline{\beta}} - HCH'\underline{\lambda}^{*} = \underline{h}$$

أو :

$$\underline{\lambda}^{*} = (HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \qquad (٥, ٦٢)$$

وبتعويض $\underline{\lambda}^{*}$ في (5.61) نجد :

$$\underline{\tilde{\beta}} = \hat{\underline{\beta}} - CH'(HCH')^{-1}(H\underline{\tilde{\beta}} - \underline{h}) \qquad (٥, ٦٣)$$

وبحل (٥٩ , ٥) من أجل $\tilde{\sigma}^2$ نجد، بعد تعويض $\underline{\tilde{\beta}}$ من (٦٣, ٥) :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) - XCH'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})\right]'$$

$$\left[(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) - XCH'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) + (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})\right]$$

$$= \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{n}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) = \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{n}Q \qquad (٥, ٦٤)$$

حيث :

$$\hat{\underline{\beta}} = CX'\underline{Y} \text{ و } Q = (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \qquad (٥, ٦٥)$$

وشكل آخر للمقدر $\tilde{\sigma}^2$ مأخوذ مباشرة من (٥٩, ٥) هو :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})$$

مما يسمح بكتابة $L(\hat{w})$ كما يلي :

$$L(\hat{w}) = (2\pi)^{-n/2}(\tilde{\sigma}^2)^{-n/2}e^{-n/2} \qquad (٥, ٦٦)$$

ومن (٥٧, ٥) و (٦٦, ٥) نجد :

$$v(\underline{y}) = L(\hat{w})/L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{n}Q}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2}$$

$$= \left(1 + \frac{Q}{n\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} = \left(1 + \frac{Q}{(n-p)\hat{\sigma}^2_{\Omega}}\right)^{-n/2} \qquad (٥, ٦٧)$$

حيث:

$$\hat{\sigma}_\Omega^2 = \frac{1}{n-p}(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-p} \quad (٥, ٦٨)$$

المقدّر غير المنحاز فوق Ω للتباين σ^2. ليكن $W = \frac{n-p}{q} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{Q}{q\hat{\sigma}_\Omega^2}$

فعندئذ يكون:

$$v(\underline{y}) = \left(1 + \frac{qW}{n-p}\right)^{-n/2} \quad (٥, ٦٩)$$

لنعتمد W كإحصاء اختبار بدلا من $v(\underline{y})$، فنلاحظ أن $v(\underline{y})$ متناقص في W وتكون منطقة الرفض هي أن نرفض H_0 عندما يكون W كبيرا.

ونعلم مما سبق في بداية هذا الفصل ومن توزيعات الصيغ التربيعية في الفصل الثالث النتائج التالية:

$$\hat{\underline{\beta}} \sim N_p(\underline{\beta}; C\sigma^2) \quad و \quad \underline{Y} \sim N_n(X\underline{\beta}; \sigma^2 I_n) \quad (٥, ٧٠)$$

$$(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \sim N_q(H\underline{\beta} - \underline{h}, HCH'\sigma^2) \quad (٥, ٧١)$$

وQ صيغة تربيعية في $(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})$ بمصفوفة $q \times q$ متناظرة $(HCH')^{-1}$، وبما أن الجداء $\frac{1}{\sigma^2}(HCH')^{-1}(HCH')\sigma^2 = I_q$ هو مصفوفة متساوية القوى وأن رتبة $(HCH')^{-1}$ هي q فيكون توزيع $\frac{Q}{\sigma^2}$ هو توزيع كاي مربع غير المركزي $\chi^2(q, \lambda)$ بعدد q من درجات الحرية ومعلمة لا مركزية λ، حيث:

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(H\underline{\beta} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\underline{\beta} - \underline{h}) \quad (٥, ٧٢)$$

وبما أن $(HH')^{-1}$ موجود فيمكن كتابة:

$$H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h} = HCX'\underline{Y} - \underline{h} = HCX'[\underline{Y} - XH'(HH')^{-1}\underline{h}]$$

وبالتالي كتابة:

$$\begin{aligned} Q &= (HCH'\ \underline{Y} - \underline{h})'\ (HCH')^{-1}\ (HCX'\ \underline{Y} - \underline{h}) \\ &= [Y - XH'\ (HH')^{-1}\ h]'\ XCH'\ (HCH')^{-1}\ HCX'\ [Y - XH'\ (HH')^{-1}\ \underline{h}] \end{aligned} \quad (٥, ٧٣)$$

وإذا رمزنا للمقدار $n\hat{\sigma}^2$ بالرمز SSE (وهو مختصر لمجموع مربعات الخطأ) نكتب:

$$SSE = n\hat{\sigma}^2 = (n-p)\,\hat{\sigma}^2_\Omega = (\underline{Y} - X\,\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\,\hat{\underline{\beta}}) = Y'('I_n - XCX')\underline{Y}$$

$$= [\underline{Y} - XH'\,(HH')^{-1}\,\underline{h}]'\,(I_n - XCX')\,[\underline{Y} - XH'\,(HH')^{-1}\,\underline{h}] \qquad (٥, ٧٤)$$

لاحظ أن مصفوفة الصيغة التربيعية Qكما كتبناها في (٥, ٧٣) أي $XCH'(HCH')^{-1}$ HCX'، هي مصفوفة متساوية القوى، وفضلا عن ذلك فإن $\underline{Y}\text{-}XH'(HH')^{-1}\underline{h}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمصفوفة تغاير $\Sigma = \sigma^2 I_n$. وكما نعلم من استقلال صيغتين تربيعتين تكون الصيغتان Q وSSE كما كتبناهما في (٥, ٧٣)و (٥, ٧٤) مستقلتين؛ لأن جداء مصفوفتيهما يساوي الصفر.

لدينا الآن أن $\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi'^2(q,\lambda)$ ونعلم من النظرية أن $\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2_\Omega}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$ وهما مستقلتان. وبالتالي يكون توزيع النسبة $\frac{Q/q\sigma^2}{\hat{\sigma}^2_\Omega/\sigma^2} = \frac{Q}{q\hat{\sigma}^2_\Omega}$ هو توزيع إف اللامركزي $F'(q, n\text{-}p; \lambda)$.

وتشكل عبارة λ كما نراها في (٥, ٧٢) صيغة تربيعية في $(H\underline{\beta} - \underline{h})$ مصفوفتها $(HCH')^{-1}$، وهذه المصفوفة موجبة محددة، وهذا يعني أن $\lambda = 0$ إذا، وفقط إذا كان $H\underline{\beta} - \underline{h} = \underline{0}$، أي إذا، وفقط إذا كانت H_0 صحيحة. وتحت الفرضية H_0 يصبح توزيع النسبة $\frac{Q}{q\hat{\sigma}^2_\Omega}$هو توزيع إف المركزي بعدد $n\text{-}p,\ q$ من درجات الحرية، ونكتب $\frac{Q}{q\hat{\sigma}^2_\Omega} = F(q, n-p)$. ونرفض H_0 من أجل قيم كبيرة لإحصاء الاختبار W. ولتحديد منطقة رفض حجمها α نرفض H_0 إذا كان $W > F_\alpha(q, n\text{-}p)$ حيث $F_\alpha(q, n\text{-}p)$ هو المئين $100(1\text{-}\alpha)$ لتوزيع F المركزي بعدد $n\text{-}p,\ q$ من درجات الحرية. وقوة هذا الاختبار كما

نعلم هو تكامل توزيع إحصاء الاختبار تحت الفرضية H_1 فوق منطقة الرفض التي حددناها، وإذا رمزنا للقوة بالرمز $\pi(\lambda)$ نكتب:

$$\pi(\lambda)=\int_{F_\alpha(q,n-p)}^{\infty} f'(w;q.n-p;\lambda)\,dw$$

حيث f' هو دالة الكثافة لتوزيع إف اللامركزي بعدد q، $n-p$ من درجات الحرية ومعلمة لا مركزية λ.

(٤ ,٦, ٥) حالات خاصة

توجد أربع حالات خاصة نواجهها كثيرا في التطبيقات العملية، وهي:

١ - $H_0: \underline{\beta} = \underline{0}$ مقابل $H_1: \underline{\beta} \neq \underline{0}$. ولدينا هنا $H = I_p$، $q = p$، $\underline{h} = \underline{0}$، وبالتالي يكون $(HCH')^{-1} = X'X$ ويكون إحصاء الاختبار.

$$W=\frac{\underline{\hat{\beta}}'X'X\,\underline{\hat{\beta}}}{p\hat{\sigma}^2_\Omega}=\frac{\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}}{p}\,\frac{n-p}{SSE}=\frac{SSR}{p}\Big/\frac{SSE}{n-p} \qquad (٥, ٧٥)$$

حيث $SSR=\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}$.

ويجدر التنويه هنا إلى أن $X'X\,\underline{\hat{\beta}}=X'\underline{\hat{Y}}=X'\underline{Y}$ وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.
والقيمة المقابلة للمقدر $\underline{\tilde{\beta}}$ فوق الفضاء المقيد تصبح بالعودة إلى (٥, ٦٣):

$$\underline{\tilde{\beta}}=\underline{\hat{\beta}}-C\,X'X\,\underline{\hat{\beta}}=\underline{0}$$

كما ينبغي أن يكون باعتبار أن الفرضية H_0 تزعم أن $\underline{\beta}=\underline{0}$.

٢ - $H_0: \underline{\beta} = \underline{\beta}_0$ مقابل $H_1: \underline{\beta} \neq \underline{\beta}_0$. متجــه من الثوابت المعروفة. لدينا هنا $H = I_p$، $q = p$، $\underline{h} = \underline{\beta}_0$ و $(HCH')^{-1} = X'X$، وإحصاء الاختبار هو:

$$W=\frac{(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}_0)'\,X'X\,(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}_0)}{p\hat{\sigma}^2_\Omega} \qquad (٥, ٧٦)$$

وفي هذه الحالة نجد:

$$\underline{\tilde{\beta}}=\underline{\hat{\beta}}-C\,X'X\,(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}_0)=\underline{\beta}_0$$

كما ينبغي أن يكون.

٣ - $H_0: \underline{l}'\,\underline{\beta} = l_0$ مقابل $H_1: \underline{l}'\,\underline{\beta} \neq l_0$ حيث $\underline{l}_0$ متجه من الثوابت المعروفة. لدينا هنا $H = \underline{l}'$ ، $\underline{h} = \underline{l}_0$ ، $q = 1$ ويصبح إحصاء الاختبار:

$$W = \frac{(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)'(\underline{l}'C\underline{l})^{-1}(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)}{\hat{\sigma}_\Omega^2} = \frac{(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)^2}{\hat{\sigma}_\Omega^2(\underline{l}'C\underline{l})} \qquad (٥, ٧٧)$$

$$= (\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)^2 \,/\, Var\,(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}})$$

ونرفض H_0 إذا كان $W \geq F_\alpha(1, n-p) = t_{\alpha/2}^2(n-p)$ وهذا يكافئ:

$$(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)/\hat{\sigma}_\Omega\sqrt{\underline{l}'C\underline{l}} \leq -t_{\alpha/2}(n-p) \text{ أو } (\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{l}_0)/\hat{\sigma}_\Omega\sqrt{\underline{l}'C\underline{l}} \geq t_{\alpha/2}(n-p) \qquad (٥, ٧٨)$$

أي أننا نقبل H_0 إذا، وفقط إذا وقعت القيمة المفترضة l_0 ضمن الفترة:

$$\underline{l}'\underline{\beta} \pm t_{\alpha/2}(n-p)\,\hat{\sigma}_\Omega\sqrt{\underline{l}'C\underline{l}}$$

وهي $100(1\text{-}\alpha)\%$ فترة ثقة للمقدار $\underline{l}'\underline{\beta}$. ولدينا هنا:

$$\tilde{\underline{\beta}} = \hat{\underline{\beta}} - C\underline{l}\,(\underline{l}'C\underline{l})^{-1}\,(\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - l_0) = \hat{\underline{\beta}} - \frac{\underline{l}'\hat{\underline{\beta}} - l_0}{\underline{l}'C\underline{l}} \cdot C\underline{l}$$

٤ - لنجزئ المتجه $\underline{\beta}$ إلى $\begin{pmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \hline \underline{\beta}_2 \end{pmatrix}$ حيث $\underline{\beta}_2$ متجه $qx1$، أي يتضمن المعالم الـ q الأخيرة من متجه المعالم $\underline{\beta}$، $q < p$. والفرضية هنا هي:

$H_0: \underline{\beta}_2 = \underline{b}_2$ مقابل $H_1: \underline{\beta}_2 \neq \underline{b}_2$ حيث $\underline{b}_2$ متجه من الثوابت المعروفة.

لنجزئ المصفوفة X وفقاً لتجزئة $\underline{\beta}$ فيكون $X = (X_1 | X_2)$ حيث يتضمن X_2 الأعمدة الـ q الأخيرة من X. وعندئذ يصبح النموذج $\underline{Y} = \underline{X}_1\underline{\beta}_1 + \underline{X}_2\underline{\beta}_2 + \underline{\varepsilon}$. وإذا رغبنا باختبار حول أي q من المعالم غير المعالم الـ q الأخيرة فإننا نبادل مواقع المعالم بحيث تصبح تلك التي يتناولها الاختبار في المواقع الـ q الأخيرة، ونبادل وفقا لذلك أعمدة المصفوفة X. لدينا الآن:

$$H = [\underline{0}|I_q],\ \underline{h} = \underline{b}_2, HCH' = [\underline{0}|I_q]\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline I_q \end{bmatrix} = C_{22}$$

ويكون إحصاء الاختبار:

$$W = \frac{(\underline{\hat{\beta}}_2 - \underline{b}_2) C_{22}^{-1} (\underline{\hat{\beta}}_2 - \underline{b}_2)}{q \hat{\sigma}_\Omega^2} \quad (٥,٧٩)$$

ولدينا:

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\beta}_2 - \underline{b}_2)' C_{22}^{-1} (\underline{\beta}_2 - \underline{b}_2) \quad (٥,٨٠)$$

ويمكن بسهولة تبيان أن $C_{22}^{-1} = X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2$ وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.

وعلى وجه الخصوص فإن للحالة $\underline{b}_2 = \underline{0}$ أهميتها الخاصة باعتبار أننا نواجهها، بصورة عامة، في تحليل التباين. وفي هذه الحالة نجد:

$$W = \underline{\hat{\beta}}'_2 \, C_{22}^{-1} \, \underline{\hat{\beta}}_2 / q \, \hat{\sigma}_\Omega^2 \quad (٥,٨١)$$

ولدينا هنا:

$$\underline{\tilde{\beta}} = \underline{\hat{\beta}} - C \left[\frac{0}{I_q} \right] C_{22}^{-1} (\underline{\hat{\beta}}_2 - \underline{0})$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\hat{\beta}}_1 \\ \hline \underline{\hat{\beta}}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{pmatrix} C_{22}^{-1} \underline{\hat{\beta}}_2 = \begin{pmatrix} \underline{\hat{\beta}}_1 \\ \hline \underline{\hat{\beta}}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{12} \, C_{22}^{-1} \underline{\hat{\beta}}_2 \\ \hdashline \underline{\hat{\beta}}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\hat{\beta}}_1 - C_{12} \, C_{22}^{-1} \underline{\hat{\beta}}_2 \\ \hdashline \underline{0} \end{pmatrix} \quad (٥,٨٢)$$

(٥,٧) النماذج المخفضة*

سنناقش فيما يلي تأثير الفرضيات $H\underline{\beta} = \underline{h}$، $H\underline{\beta} = \underline{0}$ و$\underline{\beta}_2 = \underline{0}$. على النموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$.

(أ) عند تقدير $\underline{\beta}$ خاضعة للقيد $H\underline{\beta} = \underline{h}$ نقول إننا نتعامل مع نموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ فُرضت عليه بعض القيود. ونشير إلى النموذج بدون أية قيود على أنه النموذج التام وفي المقابل نشير إلى النموذج خاضعا للقيود المفروضة عليه أنه النموذج المخفّض. وعلى سبيل المثال، ليكن:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$

ولتكن الفرضية $H_0\colon \beta_1 = \beta_3$، فالنموذج المخفض هو:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1(x_{i1} + x_{i2}) + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$

وسنحاول إيجاد معنى أو تفسير للمقدارين Q و $SSE + Q$ بدلالة مجاميع المربعات الموافقة للنموذج التام وللنموذج المخفض. وبعد توفيق النموذج التام نجد:

$SSR = \underline{\tilde{\beta}}' X'\underline{Y}$ = التخفيض العائد للنموذج التام = التخفيض (التام).

SSE = الراسب (التام).

وبصورة مماثلة:

$SSE + Q$ = الراسب (المخفض) كما وجدناه في (٥, ٦٤).

وبالتالي يكون:

$$Q = SSE + Q - SSE \tag{٥, ٨٣}$$

الراسب (المخفض) مطروحا منه الراسب (التام)

وأيضاً:

$$Q = \underline{Y}'\underline{Y} - SSE - [\underline{Y}'\,\underline{Y} - (SSE + Q)] = SSR - [\underline{Y}'\,\underline{Y} - (SSE + Q)]$$

(٥, ٨٤) = التخفيض (التام) − $[\underline{Y}'\,\underline{Y} - (SSE + Q)]$

وبما أن $SSE + Q$ هو الراسب (المخفض) فيبدو أن $Y'\,Y - (SSE + Q)$ هو التخفيض في مجموع المربعات العائد إلى توفيق النموذج المخفض. وليس الأمر كذلك دوما، وإنما في حالات خاصة، إلا أنها حالات تجد لها ميدانا واسعا في ساحة التطبيق العلمي، وهي حالات لها فوائدها العلمية الجمّة. وسنبيّن أولا أن $Y'\,Y - (SSE + Q)$ ليس، بصورة عامة، مجموع المربعات، إذ يمكن أن يكون سالبا، ذلك لأن:

$$\underline{Y}'\underline{Y} - SSE - Q = SSR - Q = \hat{\underline{\beta}}' X' \underline{Y} - (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \qquad (٥, ٨٥)$$

والحد الثاني عبارة عن صيغة موجبة نصف محددة أي أنها لا يمكن أن تكون سالبة وإذا كان عنصر أو أكثر من عناصر $\underline{h}$ كبيرا بصورة كافية فإن (٥, ٨٥) يمكن أن تصبح سالبة، وعلى سبيل المثال، لنأخذ النموذج:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

ولتكن $H_0: \beta_1 = \beta_2 + 4$، فعندئذ يكون النموذج المخفض:

$$Y_i = \beta_0 + (\beta_2 + 4)\, x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$$

أو:

$$Y_i - 4x_{i1} = \beta_0 + \beta_2\, (x_{i1} + x_{i2}) + \varepsilon_i$$

ومجموع المربعات الكلي لهذا النموذج المخفض هو $(\underline{Y} - 4\underline{x}_1)'\, (\underline{Y} - 4\,\underline{x}_1)$ حيث $\underline{x}_1$ هو العمود (١) من المصفوفة X، وليس $\underline{Y}'\,\underline{Y}$، أي أن $Y'\,Y - (SSE + Q)$ لا يمثل التخفيض في مجموع المربعات. ويمكن كتابة نموذج مخفض آخر مثل:

$$Y_i + 4x_{i2} = \beta_0 + \beta_1\, (x_{i1} + x_{i2}) + \varepsilon_i$$

ويوجد بالتالي أكثر من نموذج مخفض واحد، ومع ذلك يبقى مجموع مربعات الراسب $SSE + Q$ نفسه بالنسبة للأشكال المختلفة من النماذج المخفضة.

(ب) $H\underline{\beta} = \underline{0}$ هي حالة يكون فيها $Y'\,Y - (SSE + Q)$ التخفيض العائد لتوفيق النموذج المخفض.

لتكن المصفوفة $R = \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix}$ ذات رتبة تامة، وليكن $R^{-1} = [P\,|\,S]$ معكوسها، فعندئذ يمكن كتابة $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ على الشكل:

$$\underline{Y} = XR^{-1}\, R\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} = X[P|S]\begin{bmatrix} H\underline{\beta} \\ L\underline{\beta} \end{bmatrix} + \underline{\varepsilon} \qquad (٥, ٨٦)$$

أو:

$$\underline{Y} - XP\,(H\underline{\beta}) = XSL\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (٥, ٨٧)$$

وبما أن $H\underline{\beta} = \underline{0}$ فلدينا:

$$\underline{Y} = XSL\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

ويبقى مجموع المربعات الكلي $\underline{Y}'\,\underline{Y}$ كما كان في النموذج التام، وبالتالي:

$$\text{التخفيض العائد للنموذج المخفض} = \underline{Y}'\,\underline{Y} - [SSE + Q] \qquad (٥, ٨٨)$$

وبوضع $\underline{h} = \underline{0}$ في (٥,٨٥) نجد:

$$\underline{Y}'\underline{Y} - (SSE + Q) = \underline{\hat{\beta}}'\,X'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'\,H'(HCH')^{-1}\,H\,\underline{\hat{\beta}}$$
$$= \underline{Y}'\,[XCX' - XCH'\,(HCH')^{-1}\,HCX']\,\underline{Y}$$

والمصفوفة بين قوسين [ ] متساوية القوى وبالتالي فهي موجبة نصف محددة. ولدينا من (٥, ٨٨):

$$\text{التخفيض العائد للنموذج المخفض} - Q = Y'\,Y - SSE$$

ولكن $Y'Y$ - SSE هو التخفيض العائد للنموذج التام وبالتالي يكون Q هو التخفيض العائد للنموذج التام مطروحا منه التخفيض العائد للنموذج المخفض. وبما أن الفرق بين النموذجين التام والمخفض يعود حصرا للفرضية H_0 فمن المنطقي أن نصف Q بأنها التخفيض في مجموع المربعات العائد إلى الفرضية H_0. ويمكن تلخيص النتائج في جدول تحليل التباين (جدول تحاين) كما يلي:

جدول تحاين

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات
الانحدار (نموذج تام)	p	SSR
الفرضية	q	Q
النموذج المخفض	p-q	SSR-Q
الراسب (الخطأ)	n-p	SSE
المجموع	n	SST

(ج) الحالة $\underline{\beta}_2 = \underline{0}$. وجدنا في (٥, ٧٩) أن:

$$W = \underline{\hat{\beta}}'_2\,C_{22}^{-1}\,\underline{\hat{\beta}}_2 / q\hat{\sigma}_\Omega^2$$

وهي الحالة الأكثر فائدة أي الحالة $H = [0\,|\,I_q]$، حيث $q < p$. وكحالة خاصة من جدول التحاين أعلاه نجد:

جدول تباين في حالة $\underline{\beta}_2 = 0$

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات
النموذج تام ($\underline{\beta}$)	p	$SSR = \hat{\underline{\beta}}' X' \underline{Y}$
الفرضية : ($\underline{\beta}_2 = 0$)	q	$Q = \hat{\underline{\beta}}'_2 C_{22}^{-1} \hat{\underline{\beta}}_2$
النموذج المخفّض ($\underline{\beta}_1$)	p-q	SSR-Q
الراسب (الخطأ)	n-p	$SSE = SST - SSR$
المجموع	n	SST

مثال (٦): ليكن $y_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1$ ، $y_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \varepsilon_2$ ، $y_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \varepsilon_3$

حيث $\varepsilon \sim N_3(\underline{0}, \sigma^2 I_3)$. ونريد اختبار الفرضية $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$.

لدينا هنا :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

أو : $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ ، حيث X مصفوفة $3X2$ رتبتها 2 ، و $H_0 :(1,-1)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0$ وتنطبق

الفرضية الخطية العامة $H\underline{\beta} = \underline{h}$ حيث $n = 3$ ، $p = 2$ ، $q = 1$ ، $h = 0$.

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \hat{\underline{\beta}} = CX'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(Y_1 + 2Y_2 + Y_3) \\ -Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$SSE = \underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}' X'X \hat{\underline{\beta}} = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^3 - 6\hat{\alpha}_1^2 - 5\hat{\alpha}_2^2$$

$$H\hat{\underline{\beta}} = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2, HCH' = \frac{11}{30},$$

$$W = \frac{(H\hat{\underline{\beta}})'(HCH')^{-1} H\hat{\underline{\beta}}}{q\hat{\sigma}_\Omega^2} = \frac{(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)^2}{\frac{11}{30} S^2}$$

حيث $S^2 = \frac{SSE}{n-p} = SSE$ ، وتحت H_0 يتوزع W وفق التوزيع $F(1, 1)$.

مثال (٧): لتكن U_1 ، ... ، U_{n_1} مشاهدات مستقلة من التوزيع الطبيعي $N(\mu_1, \sigma^2)$ ولتكن V_1 ، ... ، V_{n_2} مشاهدات مستقلة من $N(\mu_2, \sigma^2)$. أوجد إحصاء الاختبار للفرضية $H_0{:}\mu_1{=}\mu_2$.

ليكن : $i = 1,\ldots,n_1$ ، $U_i = \mu_1 + \varepsilon_i$ ، $j = 1,\ldots,n_2$ ، $V_j = \mu_2 + \varepsilon_{n1+j}$.

وعندئذ يمكن كتابة :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n_1} \\ \hline V_{n_1+1} \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_1} \\ \hline \varepsilon_{n_1+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

حيث $n = n_1 + n_2$. وهذا النموذج هو من النوع $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث X مصفوفة $n{\times}2$ رتبتها 2 و $\underline{\varepsilon} \sim N_3(\underline{0}, \sigma^2 I_3)$. $H_0{:}\ H\underline{\beta} = 0$ ، $p = 2$ ، $q = 1$.

$$X'X = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}, \hat{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma U_i \\ \Sigma V_j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \end{pmatrix}$$

$$H\,\hat{\underline{\beta}} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \overline{U} - \overline{V}, H = [1, -1]$$

$$SSE = \underline{Y}'\,\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'\,X'X\,\hat{\underline{\beta}} = \sum_i U_i^2 + \sum_j U_j^2 - n_1\overline{U}^2 - n_2\overline{V}^2$$

$$= \sum_i (U_i - \overline{U})^2 + \sum_j (V_j - \overline{V})^2$$

$$(HCH') = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2},$$

$$W = \frac{(H\,\hat{\underline{\beta}})'(HCH')^{-1}\,H\,\hat{\underline{\beta}}}{qS^2} = \frac{(\overline{U} - \overline{V})^2}{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

حيث $S^2 = \frac{SSE}{n-p} = \frac{SSE}{n_1 + n_2 - 2}$.

(٨ , ٥) فترات ثقة متزامنة

(١ , ٨, ٥) طريقة شيفة Scheffe

فترات ثقة متزامنة تتصل باختبار الفرضية $H_0\text{: } H\underline{\beta} = \underline{h}$ (طريقة شيفّه *Scheffé*) بالعودة إلى إحصاء الاختبار W في (٥٤ ,٥) المستخدم لاختبار الفرضية الخطية العامة $H_0\text{: } H\underline{\beta} = \underline{h}$ مقابل $H_1\text{: } H\underline{\beta} \neq \underline{h}$ سنستخدم للسهولة الرمز $\underline{\theta} = H\underline{\beta} - \underline{h}$ و $V = H(X'X)^{-1} H'$ ، وعندئذ تتخذ الفرضية الشكل $H_0\text{: } \underline{\theta} = \underline{0}$ مقابل $H_1\text{: } \underline{\theta} \neq \underline{0}$ ، وتصبح عبارة إحصاء الاختبار كالتالي :

$$W = \frac{\underline{\hat{\theta}}' V^{-1} \underline{\hat{\theta}}}{q\hat{\sigma}^2} \quad (٥, ٨٩)$$

حيث $(n-p)\hat{\sigma}^2 = \underline{Y}'[I_n - X(X'X)^{-1}X']\underline{Y}$. وقد استعرضنا فترة الثقة في الحالة الخاصة $q = 1$ في سياق مناقشتنا للحالات الخاصة في الفقرة (٣ ,٦ ,٥). (انظر العلاقة (٧٨ ,٥)، وسنناقش الآن الحالة $q > 1$. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الاستقراءات الإحصائية القائمة على فترات الثقة تقدم للباحث من المعلومات أكثر مما يقدمه الاستقراء القائم على اختبار فرضية. وبذلك يمكن القول إن فترات الثقة أكثر أهمية. وينبغي أن يكون الغرض الرئيس من اختبار فرضية هو الوصول إلى فترة ثقة وتأمّل ما تقدمه من معلومات. وهكذا فإن ما نريده حقا من اختبار الفرضية $H_0\text{: } \underline{\theta} = 0$ مقابل $H_1\text{: } \underline{\theta} \neq 0$ هو الوصول إلى فترات ثقة حول θ_1 ، θ_2 ، . . . ، θ_q وهي عناصر المتجه $\underline{\theta}$ ، أو q من التراكيب الخطية في معالم النموذج $\underline{\beta}$ التي تمثلها سطور المصفوفة H ، وربما أيضا تراكيب خطية في العناصر θ_i. وهناك حالتان متميزتان :

١ – فترات ثقة لكل تركيب بمفرده ، وفيها نحدد $(1 - \alpha)$ فترة ثقة لكل θ_i بمعزل عن التراكيب الأخرى ، وهو ما نجده في العلاقة (٧٨ ,٥) كما أسلفنا ، أي لكل $\theta_i = \underline{L}'_i \underline{\beta}$ لدينا :

$$\underline{l}'_i\ \underline{\hat{\beta}} \pm t_{\alpha/2,n-p}\sqrt{\hat{Var}(\underline{l}'_i\ \underline{\beta})} \qquad i = 1,2,\ldots, q \qquad (٥,٩٠)$$

حيث $\underline{l}'_i$ السطر i من المصفوفة H.

ومع أن معامل الثقة لكل فترة على حدة هو α - 1، إلا أننا لا نستطيع الزعم بأن معامل الثقة الإجمالي لعبارات الثقة جميعها في آن واحد، وعدّتها q عبارة ثقة، هو

α - 1. فلو رمزنا لعبارة الثقة i بالرمز E_i، وكان $Pr[E_i] = 1 - \alpha_i$، $i = 1,\ldots,p$، فما هو $Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right]$ احتمال أن تكون العبارات جميعها صحيحة في آن معا؟ لدينا كما هو معروف:

$$1-\delta = Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right] = 1 - Pr\left[\bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_i\right] \geq 1 - \sum_{i=1}^{q} Pr\left[\overline{E}_i\right] = 1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \qquad (٥,٩١)$$

وفي الحالة $\alpha_i = \alpha$ لكل i نجد $Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right] \geq 1 - q\alpha$. وكل ما يمكننا قوله هو إن احتمال صحة العبارات جميعها في آن معا ليس α - 1 وإنما يزيد على $q\alpha$ - 1 أو يساويه. وفي حالة $\alpha = .05$ و$q = 10$ نجد $1 - q\alpha = 0.5$. وتجنبا لهذا اللبس نستعرض الحالة الثانية.

٢ – فترات ثقة متزامنة. وهنا نأخذ في الاعتبار التراكيب θ_i جميعها في وقت واحد، ونحدد فترات الثقة لكل θ_i بحيث يمثل α - 1 بالضبط احتمال أن تغطي كل فترة، وفي الوقت نفسه، المعلمة θ_i التي تخصها.

ويجب أن يحدد الباحث في كل مسألة تواجهه الطريقة التي يستخدمها. هل يعتمد على الفترات مأخوذة فرادى أم يأخذها جميعها متزامنة في الاعتبار. وكقاعدة عامة ينبغي استخدام فترات الثقة المتزامنة عندما يكون الباحث في صدد اتخاذ إجراء أو تدبير أو فعل يعتمد على معرفته (احتمال عال) بالقيم التقريبية (فترات الثقة) للمعالم θ_i جميعها في آن معا. وربما كان في المثالين التاليين ما يوضح المقصود.

$$\underline{l}'_i \, \hat{\underline{\beta}} \pm t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{Var}(\underline{l}'_i \, \underline{\beta})} \qquad i = 1,2,\ldots, q \tag{٥, ٩٠}$$

حيث $\underline{l}'_i$ السطر i من المصفوفة H.

ومع أن معامل الثقة لكل فترة على حدة هو α - 1، إلا أننا لا نستطيع الزعم بأن معامل الثقة الإجمالي لعبارات الثقة جميعها في آن واحد، وعدّتها q عبارة ثقة، هو

α - 1. فلو رمزنا لعبارة الثقة i بالرمز E_i، وكان $Pr[E_i] = 1 - \alpha_i$، $i = 1,\ldots,p$، فما هو $Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right]$ احتمال أن تكون العبارات جميعها صحيحة في آن معا؟ لدينا كما هو معروف:

$$1-\delta = Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right] = 1 - Pr\left[\bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_i\right] \geq 1 - \sum_{i=1}^{q} Pr\left[\overline{E}_i\right] = 1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \tag{٥, ٩١}$$

وفي الحالة $\alpha_i = \alpha$ لكل i نجد $Pr\left[\bigcap_{i=1}^{q} E_i\right] \geq 1 - q\alpha$. وكل ما يمكننا قوله هو إن احتمال صحة العبارات جميعها في آن معا ليس α - 1 وإنما يزيد على $q\alpha$ - 1 أو يساويه. وفي حالة $\alpha = .05$ و$q = 10$ نجد $1 - q\alpha = 0.5$. وتجنبا لهذا اللبس نستعرض الحالة الثانية.

٢ - فترات ثقة متزامنة. وهنا نأخذ في الاعتبار التراكيب θ_i جميعها في وقت واحد، ونحدد فترات الثقة لكل θ_i بحيث يمثل α - 1 بالضبط احتمال أن تغطي كل فترة، وفي الوقت نفسه، المعلمة θ_i التي تخصها.

ويجب أن يحدد الباحث في كل مسألة تواجهه الطريقة التي يستخدمها. هل يعتمد على الفترات مأخوذة فرادى أم يأخذها جميعها متزامنة في الاعتبار. وكقاعدة عامة ينبغي استخدام فترات الثقة المتزامنة عندما يكون الباحث في صدد اتخاذ إجراء أو تدبير أو فعل يعتمد على معرفته (احتمال عال) بالقيم التقريبية (فترات الثقة) للمعالم θ_i جميعها في آن معا. وربما كان في المثالين التاليين ما يوضح المقصود.

مثال (٨): عند تقـويم أداء صاروخ خلال فترة معينة، 30 ثانية مثلا $15 \le t \le 45$، نفترض النموذج الخطي $Y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$ حيث Y السرعة مقاسة بالقدم في الثانية. وt الزمن بالثواني. ونفترض أن كل ε_i يتبع التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$. نجمع بيانات من إطلاقات اختبار ونحسب منها التقديرات $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ ، و $\hat{\sigma}^2$. ويجب اتخاذ قرار حول قطعة تجهيزات مركبة على الصاروخ، وتعتمد صحة القرار على معرفة سرعة الصاروخ عند كل من اللحظتين $t = 15$ و$t = 45$. مما يجعلنا في حاجة إلى فترة ثقة لكل من التركيبين $\beta_0 + 15\,\beta_1$ و $\beta_0 + 45\,\beta_1$، تغطيان في آن واحد، وباحتمال عال $1 - \alpha = 0.95$، مثلا، القيم الصحيحة لهذين التركيبين.

وعلى الوجه الآخر لنفترض أن النتائج ستنشر وأن باحثين آخرين يمكن أن يستخدموا النتائج المنشورة، فقد يحتاج باحث إلى معرفة السرعة في اللحظة $t = 20$ فعندئذ سيحسب فترة ثقة للتركيب $\beta_0 + 20\beta_1$، بينما يحتاج باحث آخر إلى معرفة السرعة في اللحظة $t = 30$، مما يدفعه إلى حساب فترة ثقة للتركيب $\beta_0 + 30\beta_1$، ولكن لا يوجد أي عمل أو قرار بمفرده يعتمد على كون فترتي الثقة هاتين صحيحتان معا. وفي هذه الحالة من الطبيعي أن يستخدم كل من الباحثين الطريقة الأولى وهي فترة ثقة بمفردها للتركيب الذي يهمه.

مثال (٩): وكمثال آخر لنفترض أن إدارة مركز تسوّق تهتم بالطلب على سلعة معينة فوق فترة تمتد اثني عشر شهرا. ولنفترض كتقريب أولي أن الطلب Y معطى بالنموذج $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t = \mu(t) + \varepsilon_t$، حيث t الوقت معطى بالشهر من السنة $(t = 1,2,\ldots,12)$، ويتوزع كل ε_t وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$. ففي بداية العام ينبغي للمدير أن يحدد كمية المبيعات من السلعة لكل شهر ثم يطلب من المصنع تسليم الكمية اللازمة من هذه السلعة في بداية كل شهر. ولتحديد هذه الطلبيات يستخدم بيانات

المبيعات لسنوات خلت ويحسب فترات ثقة للتراكيب $\mu(1)$، $\mu(2)$، . . .، $\mu(12)$. ويطمح إلى أن يكون على درجة عالية من الاطمئنان ($1 - \alpha = .95$، مثلا) بأن فترات الثقة هذه جميعها صحيحة، فهو والحالة هذه في حاجة إلى فترات ثقة متزامنة.

وكما أشرنا آنفا فقد حددنا في الفقرة (٤ , ٦, ٥) فترة ثقة (٧٨ ,٥) لتركيب خطي بمفرده $\underline{l}'\underline{\beta}$ معاملها $1 - \alpha$، وذلك بالاعتماد على اختبار حجمه α لفرضية تتناول التركيب الخطي نفسه $\underline{l}'\underline{\beta}$ وللفرضية $H_0: \underline{\theta} = \underline{0}$ مقابل $H_1: \underline{\theta} \neq \underline{0}$ وهو اختبار يتناول كون q من التراكيب الخطية في المعالم $\underline{\beta}$ مساوية للصفر بصورة متزامنة أي في آن واحد، قد نتوقع أن يقودنا هذا الاختبار إلى فترات ثقة متزامنة للتراكيب θ_i جميعها. وفي الحقيقة يقود اختبار نسبة الإمكانية المعمم (اختبار الفرضية الخطية العامة) إلى أكثر من ذلك إذ يقود إلى فترات ثقة متزامنة حول التراكيب θ_i وحــول كل دالة خطية في هذه التراكيب θ_i، أي أنه يقود إلى فترات ثقة حول $\underline{l}'\underline{\theta}$ وذلك أياً كان المتجه $\underline{l}$ من الفضاء المتجهي ذي q بعدا، وسنرمز لهذا الفضاء بالرمز E_q. واحتمال أن تغطي هذه الفترات (عددها لا نهائي) وفي آن واحد القيم الصحيحة للمعالم الموافقة هو $1 - \alpha$. وليس هذا غريبا عندما نتذكر حقيقة أن الاختبار $H_0: \underline{\theta} = \underline{0}$ مقابل $H_1: \underline{\theta} \neq \underline{0}$ هو بالضبط اختبار $H_0: Q\underline{\theta} = \underline{0}$ مقابل $H_1: Q\underline{\theta} \neq \underline{0}$ وذلك لكل مصفوفة Q غير شاذة أبعادها $q \times q$. أي أن الاختبار يختبر، في الواقع، فرضية أن كل تركيب خطي في عناصر $\underline{\theta}$ يساوي الصفر مقابل أن تركيبا خطيا واحدا، على الأقل، من بين هذه التراكيب يختلف عن الصفر. وهكذا نتوقع أن فترات الثقة المستمدة من هذا الاختبار ستشكل فترات ثقة لكل تركيب خطي في عناصر المتجه $\underline{\theta}$.

نظرية (٨): إحصاء الاختبار W في العلاقة (٥٤ ,٥) مساو للإحصاء W^* حيث:

$$W^{*} = \frac{1}{q\hat{\sigma}^2} \max_{\underline{l} \neq \underline{0}} \left[\frac{\left[\underline{l}'(H\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})\right]^2}{\left[\underline{l}'(H(X'X)^{-1}H')\right]\underline{l}} \right] \tag{٥, ٩٢}$$

برهان*. لتبسيط الرموز سنكتب W^* بالصورة التالية:

$$W^{*} = \max_{\underline{l} \neq \underline{0}} \left[\frac{(\underline{l}'\underline{\hat{\theta}})^2}{q\hat{\sigma}^2 (\underline{l}'V\underline{l})} \right] = \frac{1}{q\hat{\sigma}^2} \max_{\underline{l} \neq \underline{0}} \left[\frac{(\underline{l}'\underline{\hat{\theta}})^2}{(\underline{l}'V\underline{l})} \right] \tag{٥, ٩٣}$$

حيث عرفنا في بداية هذه الفقرة $\underline{\theta}$ وV وهي **لا** تتضمن $\underline{l}$. ويمكن البرهان على أن القيمة العظمى للعبارة $(\underline{l}'\underline{\hat{\theta}})^2 / (\underline{l}'V\underline{l})$ (حيث V و $\underline{\hat{\theta}}$ مثبتة) عندما يتغير $\underline{l}$ فوق الفضاء المتجهي E_q^* (وهو الفضاء E_q باستثناء المتجه الصفري ذي q مركبة) هي $\underline{\hat{\theta}}'V^{-1}\underline{\hat{\theta}}$، وهكذا يمكن كتابة:

$$W^{*} = \frac{\underline{\hat{\theta}}'V^{-1}\underline{\hat{\theta}}}{q\hat{\sigma}^2} = \frac{(H\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})}{q\hat{\sigma}^2} = W \tag{٥, ٩٤}$$

نظرية (٩): ليكن النموذج الخطي $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث يتوزع $\underline{\varepsilon}$ وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2 I_n)$. لنأخذ مجموعة فترات الثقة كافة للتراكيب $\underline{l}'(H\underline{\beta})$، فترة لكل متجه $\underline{l}$ أبعاده $q \times 1$، حيث H مصفوفة $q \times q$ من الثوابت رتبتها q، وهي:

$$\begin{aligned} &\underline{l}'(H\underline{\hat{\beta}}) - \sqrt{q F_{\alpha,q,n-p}} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}} \leq \underline{l}'(H\underline{\beta}) \\ &\leq \underline{l}'(H\underline{\hat{\beta}}) + \sqrt{q F_{\alpha,q,n-p}} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}} \end{aligned} \tag{٥, ٩٥}$$

ففترات الثقة هذه جميعا (وعددها **لا** نهائي) محققة في آن واحد باحتمال $1 - \alpha$.

برهان. نعلم من النظرية (٧) من هذا الفصل أن توزيع المتغير العشوائي W المعطى في العلاقة (٥, ٥٤) هو توزيع F المركزي تحت الفرضية $\underline{h} = H\underline{\beta}$، أي إذا كان $\underline{h}$ هو القيمة الحقيقية، ولكن غير المعروفة، لعناصر المتجه $H\underline{\beta}$. وإذا عوضنا عن $\underline{h}$ بكتابة $H\underline{\beta}$ بدلا عنها في عبارة W أمكننا أن نكتب في حالة اختبار حجمه α ما يلي:

$$1 - \alpha = Pr\left[\frac{(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})' H' [H(X'X)^{-1}H']^{-1} H(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})}{q\hat{\sigma}^2} \leq F_{\alpha,q,n-p} \right]$$

وباستخدام العبارة المكافئة للإحصاء W المعطاة في (٥, ٩٢) والتي رمزنا لها بالرمز W^* نجد:

$$1-\alpha = Pr\left[\max_{\underline{l}\neq\underline{0}}\left\{\left(\frac{\left[\underline{l}'H(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\right]^2}{\underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}}\right)\left(\frac{1}{q\hat{\sigma}^2}\right)\right\}\leq F_{\alpha;q,n-p}\right] \quad (٥, ٩٦)$$

$$= Pr\left[\left(\frac{\left[\underline{l}'H(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})\right]^2}{\underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}}\right)\left(\frac{1}{q\hat{\sigma}^2}\right)\leq F_{\alpha;q,n-p}, \underline{l}\neq\underline{0} \text{ لكل}\right] \quad (٥, ٩٧)$$

ذلك؛ لأن كون أعلى قيمة للمقدار ضمن { } في (٥, ٩٦) لا تتجاوز $F_{\alpha;q,n-p}$ يكافئ تماما العبارة ضمن [ ] في (٥, ٩٧) وإذا رمزنا للمقدار $\sqrt{q\,F_{\alpha;q,n-p}}$ بالرمز S وللمقدار $\underline{l}'H(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})$ بالرمز y فيمكن كتابة (٥, ٩٧) بالصورة التالية:

$$1-\alpha = Pr\left[y^2 - S^2\,\hat{\sigma}^2\,\underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}\leq 0,\ \underline{l}\neq\underline{0} \text{ لكل}\right]$$

والمتراجحة هذه تتحقق عندما تقع قيمة y بين الجذرين أي:

$$1-\alpha = Pr\left[\underline{l}'(H\hat{\beta}) - S\,\hat{\sigma}\,\sqrt{\underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}}\leq \underline{l}'(H\underline{\beta})\right.$$

$$\left.\leq \underline{l}'(H\hat{\underline{\beta}}) + S\,\hat{\sigma}\,\sqrt{\underline{l}'[H(X'X)^{-1}H']\underline{l}},\ \underline{l}\neq\underline{0} \text{ لكل}\right] \quad (٥, ٩٨)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (١): يمكن كتابة فترات الثقة في (5.98) بالصورة التالية:

$$\underline{l}'(H\hat{\underline{\beta}}) \pm S\sqrt{\hat{Var}[l'(H\hat{\underline{\beta}})]} \quad (٥, ٩٩)$$

أيا كان المتجه $\underline{l}$ في E_q. وفي حالة $q = 1$ تصبح هذه العبارة فترة الثقة نفسها المعطاة لتركيب خطي واحد في المعالم $\underline{l}'H\underline{\beta}$.

ملاحظة (٢): لا تشكل المجموعة (اللانهائية) من فترات الثقة في (٥, ٩٩) فترات ثقة للتراكيب $\underline{l}'\underline{\beta}$ حيث $\underline{l}$ أي متجه في E_p (p عدد المعالم في النموذج) إلا إذا كانت المصفوفة H مربعة $p \times p$ ورتبتها p. وفي هذه الحالة لا ضرورة لذكر H في المسألة

هنا لأن H^{-1} موجودة، وكما ذكرنا أعلاه فإن اختبار $H_0: H\underline{\beta} - \underline{h} = \underline{0}$ مقابل $H_1: H\underline{\beta} - \underline{h} \neq \underline{0}$ يكافئ تماما اختبار $H_0: H^{-1}H\underline{\beta} - H^{-1}\underline{h} = \underline{0}$ أو $H_0: \underline{\beta} = H^{-1}\underline{h} = \underline{k}$ مقابل $H_1: \underline{\beta} \neq \underline{k}$ وهو اختبار (وبالتالي فترات ثقة) لا تعتمد على H. واستخدام H في (٥, ٩٩) يجعلها ممثلة لفترات ثقة متزامنة حول جميع التراكيب الخطية الممكنة في سطور $H\underline{\beta}$ وليس جميع التراكيب الخطية الممكنة في المعالم $\underline{\beta}$.

ملاحظة (٣): أول من أعطى فترات الثقة المتزامنة في (٥, ٩٧) كان شيفّه ويُشار إلى مثل هذه الطريقة بأنها طريقة شيفّه لوضع فترات ثقة متزامنة.

وفي أي مسألة تطبيقية يستحيل حساب عدد لا نهائي من فترات الثقة، ولكن الباحث يمكنه أن يضع وفقا لطريقة شيفّه أي عدد يرغبه من التراكيب الخطية مما تقترحه طبيعة المسالة أو التساؤلات المطروحة واحتمال أن جميع العبارات في هذه المجموعة الجزئية فقط محققة في آن واحد هو أكبر من $1 - \alpha$، أي أن:

$$Pr\left[\underline{l}'H\hat{\underline{\beta}} - S\sqrt{\hat{Var}\left[\underline{l}'H\hat{\underline{\beta}}\right]} \leq \underline{l}'H\underline{\beta} \leq \underline{l}'H\hat{\underline{\beta}} + S\sqrt{\hat{Var}\left[\underline{l}'H\hat{\underline{\beta}}\right]}\right] \geq 1 - \alpha \qquad (٥, ١٠٠)$$

لأي مجموعة من المتجهات $\underline{l}$ في E_q.

وعند وضع عبارات الثقة هذه يمكن للباحث أن ينظر إلى البيانات ويضع فترات ثقة حول أية دوال خطية في المعالم تقترحها هذه البيانات.

مثال (١٠): بالعودة إلى المثال ٥، لنفترض أننا نهتم بفترات ثقة حول جميع التراكيب الخطية في β_1 وβ_2 فعندئذ يمكن اختيار المصفوفة H كالتالي:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ وبالتالي يكون } H\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

و$\underline{l}'(H\underline{\beta}) = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$. وإذا كان $\underline{l}$ أي متجه في E_2 فعندئذ تتضمن فترات الثقة جميع التراكيب الخطية في β_1 وβ_2.

مثال (١١): بالعودة إلى المثال (٥)، لنفترض أننا نهتم بفترات ثقة حول جميع التراكيب الخطية في β_1، β_2، β_3، β_4، فعندئذ نختار H كما يلي:

$$H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} \text{ ويكون } H\underline{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{bmatrix}$$

و$\underline{l}'(H\underline{\beta}) = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + l_3\beta_3 + l_4\beta_4$، حيث تتغير عناصر المتجه $\underline{l}$ فوق E_4.

مثال (١٢): لنفترض أن البيانات التالية تخضع لنموذج خطي بسيط $Y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j$، $j = 1,2,\ldots,10$.

j	50	00	80	40	10	75	60	80	10	10
j	00	0	0	40	30	80	0	20	90	60

لدينا:

$$X'=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\550&200&280&340&410&475&160&380&510&510\end{bmatrix}$$

و $X'X\hat{\underline{\beta}}=X'\underline{Y}$ تصبح:

$$\begin{bmatrix}10&3815\\3815&1620425\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1250\\550500\end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}'\underline{Y}=191500, n=10, p=2, \hat{\beta}_0=-45.227, \hat{\beta}_1=0.446,$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\left[\underline{Y}'\underline{Y}-\hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y}\right]=299.766. \quad V(\hat{\beta}_0)=294.389$$

$$V(\hat{\beta}_1)=.00182$$

وبوضع فترة ثقة لكل من β_0 وβ_1 بمفردها، بمعامل ثقة $1-\alpha=.95$ نجد:

$$\beta_0 : -45.227 \pm 2.306\sqrt{294.389}$$

أو:

$$-84.793 \le \beta_0 \le -5.661$$

$$\beta_1 : 0.446 \pm 2.306\sqrt{.00182}$$

أو :

$$0.384 \le \beta_1 \le 0.544$$

ولوضع 0.95 فترات ثقة متزامنة لجميع التراكيب الخطية الممكنة للمعلمتين β_0 و β_1 نستخدم المعادلة (٥, ٩٩). وباستخدام هذه المعادلة لوضع فترتي ثقة متزامنتين للمعلمتين β_0 وβ_1 فقط نحصل وبمعامل ثقة أكبر من 0.95 على الفترتين :

$$\beta_0 : -45.227 \pm 2.987\sqrt{294.389}$$

أو :

$$-96.477 \le \beta_0 \le 6.023$$

$$\beta_1 : 0.446 \pm 2.987\sqrt{0.00182}$$

أو :

$$0.319 \le \beta_1 \le 0.573$$

ويجدر التنويه، في الختام، إلى أننا إذا رفضنا الفرضية $H_0 : H\underline{\beta} = \underline{h}$ وحسبنا $1 - \alpha$ فترات ثقة متزامنة بطريقة شيفّه للتراكيب الخطية في المعالم التي تشكل عناصر المتجه $H\underline{\beta}$ وعدد هذه التراكيب q، فيمكن لجميع هذه الفترات أن تتضمن القيم المقابلة في $\underline{h}$. وعلى سبيل المثال عند اختبار $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ في المثال (١٢) يمكن أن نرفض H_0 عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ ونحصل، باستخدام (٥, ٩٩)، على 0.95 فترتي ثقة للمعلمتين β_0 وβ_1 يمكن لكل منهما أن تتضمن القيمة صفر. إلا أنه لابد أن يوجد تركيب خطي في β_0 وβ_1 لا تتضمن فترة الثقة الخاصة به القيمة صفر. وفي المقابل إذا لم نرفض الفرضية H_0 عند المستوى α فإن جميع فترات الثقة بمعامل $1 - \alpha$ المحسوبة بتطبيق (٥, ٩٩) يجب أن تتضمن القيم المقابلة، أي أن فترات الثقة حول $\underline{l}' H\underline{\beta}$ يجب أن تتضمن قيم $\underline{l}' \underline{h}$ المقابلة وذلك أيا كان المتجه $\underline{l}$ من الفضاء E_q.

(٢, ٨, ٥) طريقة بونفيروني Bonferroni

بالعودة إلى (٥, ٩١) وبافتراض أننا نرغب في وضع k فترة ثقة متزامنة بحيث يكون معامل الثقة لها جميعا في آن واحد أكبر من $1 - \alpha$ فيمكن تحقيق ذلك باختيار معامل ثقة قدره $1-\frac{\alpha}{k}$ لكل فترة مستخدمين (٥, ٣٤) لحساب كل منها، وعندئذ نجد من (٥, ٩١) :

$$Pr\left[\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right] \geq 1-k\frac{\alpha}{k}=1-\alpha \qquad (٥, ١٠١)$$

مما يجعل معامل الثقة الإجمالي أو المتزامن لفترات الثقة المرغوبة جميعها مساوياً على الأقل $1 - \alpha$. ويمكن استخدام هذه الطريقة في حالة k صغير، إذ عندما يكون k كبيرا فقد تقود هذه الطريقة إلى فترات ثقة متزامنة هي من الاتساع بحيث تفقد أي قيمة عملية. وقد نلجأ إلى زيادة α فنأخذ $\alpha = .10$ مثلا.

وغالبا ما نحتاج، عند استخدام هذه الطريقة، إلى قيم للتوزيع t غير مذكورة في جداول التوزيع t المعتادة. ويكون التقريب التالي عندئذ مفيدا :

$$t_{\alpha,v} \approx Z_\alpha\left(1-\frac{Z_\alpha^2+1}{4v}\right) \qquad (٥, ١٠٢)$$

حيث يرمز Z_α للمئين $100(1-\alpha)$ للتوزيع الطبيعي المعياري. ويمكن حساب Z_α عند الحاجة بالاستيفاء مستخدمين القيم المتوفرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري. وتوجد جداول تعطي $t_{\alpha/2k,v}$ من أجل قيم مختلفة لِ α.

وتجدر الإشارة أخيرا إلى أنه يمكن وضع فترات ثقة متزامنة بمعامل ثقة $1 - \alpha$ تماما بالاعتماد على توزيع ستيودنت t متعدد المتغيرات.

(٩ , ٥) تمارين

١ - في النموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث يتوزع $\underline{\varepsilon}$ وفق $N(\underline{0}, \sigma^2 I)$، حيث $n = 10$، $p = 3$، لدينا المعادلات الناظمية التالية :

$$4\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2-2\hat{\beta}_3=4$$
$$2\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3=7$$
$$-2\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+6\hat{\beta}_3=9$$

(أ) أوجد $\hat{\beta}_1$ ، $\hat{\sigma}^2$.

(ب) ضع 95% فترة ثقة منفردة لكل من β_1 ، β_2 ، β_3 ، $\beta_1 - \beta_2$ و$\beta_1 + \beta_3$.

٢ - في المسألة السابقة اختبر $H_0: 2\beta_1 + \beta_2 = 0, \beta_2 + 3\beta_3 = 0$ مقابل أحد التركيبين على الأقل لا يساوي الصفر H_1:. استخدم $\alpha = 0.05$. ضع 95% فترات ثقة متزامنة على التركيبين الخطيين الواردين في الفرضية H_0 مستخدما طريقة شيفّه.

٣ - في المسألة (١) ضع 95% فترات ثقة متزامنة لِ β_1 ، β_2 ، β_3 ، $\beta_1 - \beta_2$ و $\beta_1 + \beta_3$ مستخدما طريقة شيفّه.

٤ – عند خزن الآيسكريم تحت درجات حرارة منخفضة يتصل $E(Y)$ متوسط تقلّص حجم الآيسكريم في حاويات حجمها مائة سنتمتر مكعب بزمن التخزين وفق النموذج الخطي $Y = \beta t + \varepsilon$. قمنا بتجربة قسنا فيها تقلص الحجم في فترات زمنية مختلفة وكانت البيانات المشاهدة كما يلي: (t مقاسة بالأسابيع وY_i بالسنتمتر المكعب):

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2.10	2.81	3.04	3.10	6.24	8.01	5.79	8.38

والمطلوب تقدير β وσ^2. احسب فترة ثقة منفردة لكل من β وσ^2. افترض أن المقادير ε_i تتوزع بصورة مستقلة وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$.

٥ – في المسألة (٤) اختبر $H_0: \beta = 0$ مقابل $H_1: \beta \neq 0$، استخدم $\alpha = .05$.

٦ – في المسألة (٥) أوجد قوة الاختبار عندما يكون $\beta / \sigma = 0.2$.

٧ – في النموذج الخطي البسيط $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1,\ldots,n > 2$ ، برهن أن $Var(\hat{\beta}_0)$ يكون أصغر ما يمكن إذا اختيرت المقادير X_i بحيث يكون $\overline{X} = 0$.

٨ – بيّن أن إحصاء الاختبار في (٥٤ , ٥) لا يتغير إذا اختبرنا الفرضية $H_0: QH\underline{\beta} = Q\underline{h}$ مقابل $H_1: QH\underline{\beta} \neq Q\underline{h}$ وذلك بدلا من الفرضية $H_0: H\underline{\beta} = \underline{h}$ مقابل $H_1: H\underline{\beta} \neq \underline{h}$.
حيث Q أي مصفوفة مربعة $q \times q$ غير شاذة.

٩ – إذا كانت X مصفوفة $n \times p$ رتبتها p وكانت H مصفوفة $q \times p$ رتبتها q، بيّن أن $H(X'X)^{-1} H'$ لها معكوس. هل المصفوفة $H(X'X)^{-1} H'$ موجبة محددة؟

١٠ – افترض أن اختصاصياً في علم النفس يعتقد أن فترة الانتباه لطفل صغير عند تعرضه لعمل جديد يتضمن التعامل مع قطع للبناء تعتمد على حال ذكاء الطفل فقط. والنموذج المقترح هو $Y = \beta_0 + \beta_1 X^2 + \varepsilon$ حيث تمثل Y فترة الانتباه بالدقائق وX حاصل الذكاء.

(أ) هل هذا النموذج خطي؟ اشرح.

(ب) افترض البيانات التالية لتجربة. من هذا النوع :

حاصل الذكاء X	فترة الانتباه Y بالدقائق
70	0.5
77	1.0
85	2.0
92	2.5
98	2.6
105	3.3
112	2.1
120	1.5
130	1.0
150	0.5

اكتب متجه الاستجابة $\underline{Y}$ ومتجه المعالم $\underline{\beta}$ والمصفوفة X لهذه البيانات.

١١ – ليكن $\underline{e}$ متجه الرواسب أي $\underline{e} = \underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}$.

(أ) بيّن أن $\Sigma e_i = 0$. (ارشاد : اكتب $\Sigma e_i = [1,\ldots,1][\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}]$ وقارن مع السطر الأول في المعادلات الناظمية $X'X\hat{\underline{\beta}} = X'\underline{Y}$).

(ب) أوجد $E(\underline{e})$ ، $Var(\underline{e})$.

١٢- افترض أن الدخل السنوي لشخص في سن الثلاثين Y يتصل بعدد سنوات التعليم X وفق نموذج انحدار خطي بسيط ولديك البيانات التالية :

عدد سنوات التعليم X	الدخل السنوي بآلاف الدولارات Y
8	8
12	15
14	16
16	20
16	25
20	40

(أ) اكتب $\underline{Y}$ و$\underline{X}$ وأوجد $X'X$، $X'Y$، و$(X'X)^{-1}$.

(ب) أوجد أفضل تقدير خطي غير منحاز لمعالم النموذج.

١٣- في النموذج الخطي $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ بيّن أن

$(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y}-X\hat{\underline{\beta}})=\underline{Y}'\underline{Y}-\hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y}$.

١٤- في المعادلة (٣٤ , ٥) أوجد توزيع L^2 حيث L طول فترة الثقة.

١٥- في المسألة ١٤ أوجد توزيع L ثم احسب $E(L)$ و$Var(L)$.

١٦- بالعودة إلى (١٧ , ٥)من المثال (١) بيّن أن $\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\overline{x}\,\hat{\beta}_1$.

١٧- بالعودة إلى الفقرة (١, ٦, ٥) بيّن أن $A_2\ A = A\ A_2 = A$. وأن $A_2 - A$ مصفوفة متساوية القوى.

١٨- بالعودة إلى الفقرة (٤, ٦, ٥) بيّن أن $X'\hat{\underline{Y}}=X'\underline{Y}$.

١٩- بالعودة إلى العلاقة (٥, ٨٠) بيّن أن $C_{22}^{-1}=X_2'X_2-X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2$.

٢٠- لدينا النموذج

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\varepsilon_i$$

حيث يتوزع كل من المتغيرات ε_i بصورة مستقلة وفق التوزيع الطبيعي $N(0,\sigma^2)$.

والبيانات التي حصلنا عليها هي :

Y	12.1	5.5	4.6	4.5	10.8	4.9	6.0	4.2	5.3	6.7	4.0	6.1
X_1	0.870	0.202	0.203	0.198	0.730	0.150	0.205	0.670	0.205	0.271	0.203	0.264
X_2	1.69	1.17	1.17	1.21	1.63	1.59	1.14	1.92	1.22	1.71	1.16	1.37

(أ) اكتب المعادلات الناظمية.

(ب) أوجد أفضل تقدير خطي غير منحاز لمعالم النموذج واكتب النموذج المقدَّر.

(ج) أوجد أفضل تقدير خطي غير منحاز للتراكيب $\underline{\beta}\ \underline{l}'_1$ و $\underline{\beta}\ \underline{l}'_2$، حيث $\underline{l}'_1 = [0,1,-1]$ و $\underline{l}'_2 = [0, 1, 2]$.

(د) اختبر $\beta_0 = 8.00$ و $H_0: \beta_0 - 2\beta_2 = 0$ مقابل $\beta_0 \neq 8.00$ أو $H_1: \beta_0 - 2\beta_2 \neq 0$ عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$.

(هـ) احسب 95% فترة ثقة منفردة لكل من β_0، β_1، وβ_2.

(و) احسب 95% فترات ثقة متزامنة للمعالم β_0، β_1، وβ_2 مستخدما طريقة شيفّه، ثم طريقة بونفيروني.

٢١- في النموذج الخطي البسيط بيّن أن:

$$\frac{1}{n-2}\left[\Sigma(Y_i-\overline{Y})^2-\frac{\Sigma(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}\right]=\frac{1}{n-2}\left[(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})\right]$$

٢٢- في النموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $n = 10$، $p = 3$ حسبنا المعادلات الناظمية التالية ($\underline{Y}'\ \underline{Y} = 58$):

$$3\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2\hat{\beta}_3=1$$
$$\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3=7$$
$$-2\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+4\hat{\beta}_3=9$$

(أ) أوجد $\hat{\beta}_1$ ، $\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}$ ، $\hat{\sigma}^2$.

(ب) ضع 95% فترات ثقة منفردة لكل من σ^2 ، β_1، β_2، β_3، و$\beta_1 - \beta_2$.

(ج) اكتب جدول التحاين لاختبار الفرضية $H_0: \beta_1 = 0$ مقابل $H_1: \beta_1 \neq 0$.

طرائق حسابية

(٦,١) مقدمة

سنستعرض في هذا الفصل طريقة الجذر التربيعي وهي طريقة حسابية معروفة تنسب إلى شولسكي Cholesky وتسمى أحيانا باسمه. وهي تفضي إلى العديد من التقنيات الحسابية الميسّرة في الإحصاء سنقدم ما كان منها يتعلق بالتقدير النقطي أو التقدير بفترة أو اختبار فرضية بالإضافة إلى حساب مقلوب مصفوفة غير شاذة.

(٦,٢) طريقة الجذر التربيعي

تعتمد هذه الطريقة على نظرية تقول إنه إذا كانت S مصفوفة متناظرة $p \times p$ موجبة محددة فتوجد مصفوفة مثلثة وحيدة T رتبتها p بحيث يكون:

$$S = T' T \qquad (٦,١)$$

وبحيث يكون $t_{ii} > 0$ ، $i = 1,\ldots,p$

لنكتب (٦,١) بصورة مفصلة فنجد:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & t_{p3} & t_{p4} & \cdots & t_{pp} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1p} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2p} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{pp} \end{bmatrix}$$

ومن قاعدة ضرب مصفوفتين نجد بسهولة العلاقات التالية التي تعطي عناصر المصفوفة T بدلالة عناصر المصفوفة S وذلك وفقا للخطوات التالية :

خطوة (١): $$S_{11} = t_{11}^2 \Rightarrow t_{11} = \sqrt{S_{11}} \qquad (٦, ٢)$$

فللحصول على العنصر t_{11} ليس علينا إلا أن نحسب الجذر التربيعي الموجب للعنصر S_{11}.

خطوة (٢): نحسب بقية عنصر السطر الأول من T كما يلي :

$$S_{1j} = \sum_{k=1}^{p} (T')_{1k} (T)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (T)_{k1} (T)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} t_{k1} t_{kj} = t_{11} t_{1j}$$

ومنه :

$$t_{1j} = \frac{S_{1j}}{t_{11}} \quad ، \quad j = 2,\ldots,p \qquad (٦, ٣)$$

وهذا يعني أنه لاستكمال عناصر السطر الأول من T نقسم عناصر السطر الأول من S على t_{11} التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة.

خطوة (٣): لحساب عناصر السطر i من T ، $i = 2,\ldots,p$ ، نبدأ بالعنصر الأول المغاير للصفر وهو t_{ii} فنجد :

$$S_{ii} = \sum_{k=1}^{i} (T')_{ik} (T)_{ki} = \sum_{k=1}^{i} (T)_{ki}^2 = t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \ldots + t_{ii}^2$$
$$= \sum_{j=1}^{i-1} t_{ji}^2 + t_{ii}^2$$

ومنه :

$$t_{ii} = \sqrt{S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} t_{ji}^2} \qquad (٦, ٤)$$

أي لحساب t_{ii} نطرح من العنصر المقابل S_{ii} مجموع مربعات العناصر التي تعلو العنصر t_{ii} في العمود i من T ثم نأخذ الجذر التربيعي لناتج الطرح وسنشير إلى العناصر t_{ji} ، $j = 1,\ldots,i\text{-}1$، وهي العناصر التي تعلو العنصر t_{ii} في العمود i من T على أنها عناصر محورية ، ويحسن إحاطتها بدوائر تمييزا لها باعتبار أن الحسابات اللاحقة في هذه الخطوة تعتمد عليها.

ولحساب بقية عناصر السطر i من T ، نكتب :

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{i} (T')_{ik} (T)_{kj} = \sum_{k=1}^{i} (T)_{ki} (T)_{kj} \, , j > i$$

أو :

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{i} t_{ki} \, t_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \, t_{kj} + t_{ii} \, t_{ij}$$

ومنه :

$$t_{ij} = \frac{\left(S_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \, t_{kj} \right)}{t_{ii}} \quad , j > i \qquad (٦, ٥)$$

أي لحساب العنصر t_{ij} ، $j = i+1,\ldots p$، من السطر i من T نطرح من العنصر المقابل S_{ij} مجموع جداءات العناصر المحورية بالعناصر المقابلة لها في العمود j من T ثم نقسم ناتج الطرح على t_{ii}.

مثال (١): لتكن المصفوفة المتناظرة :

$$S = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 12 & -4 \\ 8 & 5 & 11 & -4 \\ 12 & 11 & 70 & -31 \\ -4 & -4 & -31 & 63 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة T بحيث يكون $S = T' \, T$.

الحل: لتطبيق طريقة الجذر التربيعي لنضع عناصر S ضمن قوسين [ ] ونرسم تحتها خط. وبتطبيق التقنية التي وصفناها في الخطوات الثلاث آنفا نحصل على عناصر المصفوفة المثلثة T المطلوبة تحت الخط المرسوم وفقا للهيئة المبينة فيما يلي:

$$\frac{\begin{bmatrix} 16 & 8 & 12 & -4 \\ 8 & 5 & 11 & -4 \\ 12 & 11 & 70 & -31 \\ -4 & -4 & -31 & 63 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}} = \frac{[S]}{[T]}$$

(٦,٣) حساب S^{-1} بطريقة الجذر التربيعي

نلاحظ أن تطبيق تقنية الجذر التربيعي التي وصفناها في الخطوات الثلاث من الفقرة السابقة تنقلنا من المصفوفة S إلى المصفوفة المثلثة T أي أنها تكافئ ضرب المصفوفة S من اليسار بالمصفوفة T'^{-1}، ذلك؛ لأن $T'^{-1}S = T'^{-1}(T'T) = T$. لنقم الآن بتوسيع الهيئة التي اعتمدناها في المثال ١ بحيث نضع فوق الخط الفاصل عناصر S وإلى جانبها عناصر المصفوفة الواحدية I_p، أي لننطلق من الهيئة $[S|I_p]$ ثم نطبق عليها طريقة الجذر التربيعي لنحصل تحت الخط الفاصل على المصفوفة المثلثة T تحت S مباشرة، كما سبق، ونحصل أيضاً على T'^{-1}، معكوس منقول T تحت I_p مباشرة. ذلك؛ لأن $T'^{-1}[S|I_p] = [T|T'^{-1}]$ ونوضح ذلك بالمخطط التالي:

$$\frac{[S \mid I_p]}{[T \mid T'^{-1}]} \qquad (٦,٦)$$

لنتذكر الآن أنه إذا كانت A أي مصفوفة $p\times q$، فوفقا لقاعدة ضرب المصفوفات نحصل على العنصر ij من المصفوفة $A'A$، وهي مصفوفة مربعة $p\times p$، بحساب الجداء

الداخلي لمتجه السطر i من A' بمتجه العمود j من A، ولكن السطر i من A' هو العمود i من A، وهكذا نصل إلى القاعدة التالية:

يمكن استخدام متجهات الأعمدة في مصفوفة A تحوي p من الأعمدة للحصول على المصفوفة المربعة $B = A' A$ وأبعادها $p \times p$. ولحساب العنصر b_{ij} من B نأخذ الجداء الداخلي لمتجه العمود i من A بالعمود j من A، $i = 1,...,p$. ، $j = 1,...,p$، ويتطبيق هذه القاعدة نلاحظ أنه يمكن الحصول على عناصر $S^{-1} = (T' T)^{-1} = T^{-1} T'^{-1}$، باستخدام متجهات الأعمدة للمصفوفة T'^{-1} التي حصلنا عليها تحت I_p، ذلك؛ لأن $T^{-1} = \left(T'^{-1}\right)'$.

مثال (٢): احسب معكوس S في المثال (١).

الحل: بتطبيق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S | I_p]$ نجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 16 & 8 & 12 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 11 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 70 & -31 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -31 & 63 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 3 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & \frac{7}{24} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

أي أن:

$$T'^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{24} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

ومن متجهات الأعمدة في هذه المصفوفة نحصل على المصفوفة المتناظرة S^{-1}:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} .397888321 & -.744331065 & .049886621 & .002551020 \\ -.744331065 & 1.699546485 & -.143990929 & -.010204081 \\ .049886621 & -.143990929 & .032879818 & .010204081 \\ .002551020 & -.010204081 & .010204081 & .020408163 \end{bmatrix}$$

(٦,٤) حساب التقديرات النقطية لمعالم نموذج خطي

(أ) تقدير المعاملات $\underline{\beta}$. لنعد إلى المعادلات الناظمية:

$$X'X\,\underline{\hat{\beta}} = X'\underline{Y}$$

ولنرمز بالرمز S لِـ$X'X$ وبالرمز $\underline{s}$ لِـ$X'\underline{Y}$ فتصبح المعاملات الناظمية:

$$S\,\underline{\hat{\beta}} = \underline{s} \qquad (٦,٧)$$

بتطبيق تقنية الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}]$ نحصل على:

$$T'^{-1}[S|\underline{s}] = [S|\underline{t}] \qquad (٦,٨)$$

حيث $T'^{-1}\underline{s} = \underline{t}$. وهكذا تتحول المعادلات الناظمية لتتخذ الشكل:

$$T\,\underline{\hat{\beta}} = \underline{t} \qquad (٦,٩)$$

وبما أن T مصفوفة مثلثة فيصبح حل هذه المعادلات ميسّرا للغاية، ولا يحتاج إلى حساب المعكوس S^{-1}، فالمعادلة الأخيرة تتضمن مجهولا واحدا وهي، على وجه التحديد:

$$t_{pp}\,\hat{\beta}_p = t_p$$

حيث t_p هو العنصر الأخير من المتجه $\underline{t}$. وبحل هذه المعادلة نجد :

$$\hat{\beta}_p = t_p / t_{pp} \qquad (٦, ١٠)$$

والمعادلة قبل الأخيرة تقتصر على المجهولين $\hat{\beta}_p$ الذي حسبناه لتوّنا والمجهول $\hat{\beta}_{p-1}$ ، وهكذا.

مثال (٣): (من مثال ص٢٣٥ من كتاب Graybill ١٩٧٦م) لدينا المعادلات الناظمية :

$$4\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 - 4\hat{\beta}_3 = 12$$
$$2\hat{\beta}_1 + 10\hat{\beta}_2 + 4\hat{\beta}_3 = 6$$
$$-4\hat{\beta}_1 + 4\hat{\beta}_2 + 9\hat{\beta}_3 = -15$$

احسب $\hat{\beta}_1$ ، $\hat{\beta}_2$ ، $\hat{\beta}_3$ بطريقة الجذر التربيعي.

الحل : من المعادلات المعطاة نجد أن :

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \underline{s} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق تقنية الجذر التربيعي على $[S|\underline{s}]$ نجد :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 12 \\ 2 & 10 & 4 & 6 \\ -4 & 4 & 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 \\ & 3 & 2 & 0 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$-1 \quad 2 \quad -3$$

وهكـــذا نجـــد أن $\hat{\beta}_3 = \dfrac{-3}{1} = -3$ ، $\hat{\beta}_2 = \dfrac{0-2(-3)}{3} = 2$ ، $\hat{\beta}_1 = \dfrac{6+2(-3)-(1)(2)}{2} = -1$

ولحساب تقدير التباين σ^2 نعود إلى العلاقة (٥.) فنجد :

$$(n-p)\,\hat{\sigma}^2 = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'X(X'X)^{-1}\underline{Y}'X \qquad (٦, ١١)$$

نعلم أن $\underline{t} = T'^{-1}\,\underline{s}$ لنحسب الآن مجموع مربعات عناصر المتجه $\underline{t}$ فنجد :

$$\underline{t}'\ \underline{t} = \underline{s}'\ T^{-1}T'^{-1}\ \underline{s} = \underline{s}'\ (T'\ T)^{-1}\ \underline{s} = \underline{s}'\ S^{-1}\ \underline{s} = \underline{Y}'\ X(X'X)^{-1}\ X'\ \underline{Y}$$

وهو بالضبط الحد الثاني في الطرف الأيمن من العلاقة (٦,١١). ولحساب $\hat{\sigma}^2$ نطرح مجمع مربعات عناصر المتجه $\underline{t}$ من مجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\underline{Y}$ ونقسم الناتج على $(n-p)$.

مثال (٤): في المثال (٣) احسب تقدير التباين $\hat{\sigma}^2$ إذا علمت أن عدد المشاهدات n كان ٢٥ وأن مجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\ \underline{Y} = 133$.

الحل. مجموع مربعات عناصر المتجه $\underline{t}$ هو $6^2 + (-3)^2 = 45$ وبالتالي :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{t}'\underline{t}}{n-p} = \frac{133-45}{25-3} = 4$$

(٦,٥) فترات الثقة لمعالم نموذج خطي

سنبدأ بإيضاح تقنية الحساب لفترة ثقة بمعامل ثقة $100(1\text{-}\alpha)\%$ لتركيب خطي في المعالم $\underline{l}'\underline{\beta} = l_1\beta_1 + \ldots + l_p\beta_p$، حيث l_1، ...، l_p أعداد ثابتة، وذلك باستخدام طريقة الجذر التربيعي.

نعلم من العلاقة (٥,٣٤) أن فترة الثقة المطلوبة معطاة بالعبارة :

$$\underline{l}'\ \underline{\hat{\beta}} \pm t_{\alpha/2,n-p}\ \hat{\sigma}\sqrt{\underline{l}'(X'X)^{-1}\underline{t}} \qquad (٦,١٢)$$

حيث $t_{\alpha/2,\ n-p}$ هو المئين $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ لتوزيع ستيودنت t بعدد $(n\text{-}p)$ من درجات الحرية. ويحتاج تطبيق هذه العبارة إلى حساب معكوس المصفوفة $S = X'\ X$، بالإضافة إلى حساب $\underline{l}'\ S^{-1}\ \underline{l}$ و $\hat{\sigma}^2$ و $\underline{l}'\ \underline{\hat{\beta}}$.

سنفترض، بصورة عامة، أننا نرغب في الحصول على فترة ثقة لكل من عدد q من التراكيب الخطية المختلفة في المعالم، ولنرمز لهذه التراكيب بالرموز $\underline{l}'_1\underline{\beta}$، ...، $\underline{l}'_q\underline{\beta}$. لنأخذ الآن الهيئة :

$$[S\,|\,\underline{s}\,|\,\underline{l}_1, \underline{l}_2, \ldots, \underline{l}_q]$$

وتطبيق طريقة الجذر التربيعي عليها يكافئ ضربها من اليسار بالمصفوفة T'^{-1} ، وبالتالي يمكننا كتابة :

$$T'^{-1}[S|\underline{s}|\underline{l}_1,\ldots,\underline{l}_q]=[T|\underline{t}|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_q] \qquad (٦,١٣)$$

حيث $\underline{a}_i=T'^{-1}\,\underline{l}_i$ ، $i=1,\ldots,q$. لنحسب مجموع مربعات عناصر المتجه $\underline{a}_i$ فنجد :

$$\underline{a}'_i\,\underline{a}_i=\underline{l}'_i\,T^{-1}\,T'^{-1}\,\underline{l}_i=\underline{l}'_i\,(T'T)^{-1}\,\underline{l}_i=\underline{l}'_i\,S^{-1}\,\underline{l}_i \qquad (٦,١٤)$$

وبذلك نحصل بسرعة وبسهولة على ما تحت الجذر في العلاقة (٦.١٢) دون الاضطرار إلى حساب S^{-1} وفضلا عن ذلك، إذا حسبنا الجداء الداخلي للمتجهين $\underline{a}_i$ و$\underline{t}$ نجد :

$$\underline{a}'_i\,\underline{t}=\underline{l}'_i\,T^{-1}\,T'^{-1}\,\underline{s}=\underline{l}'_i\,S^{-1}\,\underline{s}=\underline{l}'_i\,(X'X)^{-1}\,X'\underline{Y}=\underline{l}'_i\,\underline{\hat{\beta}} \qquad (٦,١٥)$$

وهو المقدار الرئيس الآخر الذي نحتاج في عبارة فترة الثقة (لاحظ أننا حسبناه دون اللجوء إلى تقديرات المعالم $\underline{\hat{\beta}}$ كل بمفردها). وقد تعلمنا آنفا كيفية حساب $\hat{\sigma}^2$ وبذلك لا يبقى علينا إلا الحصول على المئين $t_{\alpha/2,\,n-p}$ من جدول التوزيع t ثم وضع فترة الثقة المطلوبة لكل تركيب من التراكيب الخطية المعطاة.

مثال (٥): بالعودة إلى المثالين (٣ و٤)، احسب 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين في المعالم $2\beta_1+\beta_2-3\beta_3$, $4\beta_1+5\beta_2-7\beta_3$.

الحل. نلاحظ أولا أن $\underline{l}'_1 = (2, 1, -3)$ و $\underline{l}'_2 = (4, 5, -7)$. نطبق الآن طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}|\underline{l}_1, \underline{l}_2]$ فنجد:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 12 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & 9 & -15 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 & 1 & 2 \\ & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن $\underline{a}'_1 = (1, 0, -1)$ و $\underline{a}'_2 = (2, 1, -5)$.

لوضع فترة الثقة للتركيب الأول نحسب $\underline{a}'_1\ \underline{a}_1 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$ و $\underline{a}'_1\ \underline{t} = 1 \times 6 + 0 \times 0 + (-1)(-3) = 0$. ونعلم سابقا أن $\hat{\sigma} = 2$ فتكون فترة الثقة المطلوبة: $9 \pm 2.407(2)\sqrt{2}$ أو 9 ± 6.808.

ولوضع فترة الثقة للتركيب الآخر نجد بصورة مماثلة $\underline{a}'_2\ \underline{a}_2 = 30$ و $\underline{a}'_2\ \underline{t} = 27$ وتكون فترة الثقة المطلوبة:

$$27 \pm 2.407(2)\sqrt{30} \quad \text{أو} \quad 27 \pm 26.367$$

(٦, ٦) اختبار فرضية خطية عامة

بالعودة إلى الفقرة (٢, ٦, ٥) حيث قدمنا اختبار فرضية خطية عامة $H_0{:}H\underline{\beta} = \underline{h}$ مقابل البديل $H_1{:}\ H\underline{\beta} \neq \underline{h}$، حيث المصفوفة H والمتجه $\underline{h}$ كما عرفناهما في حينها. ورأينا أننا نحتاج للقيام بهذا الاختبار إلى حساب إحصاء الاختبار:

$$W = \frac{(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})}{q\hat{\sigma}^2} \qquad (٦, ١٥)$$

حيث q رتبة المصفوفة H، و$C = (X'X)^{-1}$. ولحساب الإحصاء W نحتاج إلى حساب $(HCH')^{-1}$، وهذا يتضمن حساب معكوس $S = X'X$ ثم معكوس HCH'، وكذلك حساب $(H\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})$.

بتطبيق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}|H']$ نجد:

$$T'^{-1}\,[T'T|\underline{s}|H'] = [T|\underline{t}|G'] \qquad (٦, ١٦)$$

حيث $t = T'^{-1}X'\underline{Y}$ ، $G' = T'^{-1}H'$ ، أي $G = H\,T^{1}$، حيث G مصفوفة $q{\times}p$.

ونحصل على العنصر ij من المصفوفة G بحساب الجداء الداخلي لمتجه العمود i ومتجه العمود j من أعمدة G' التي حصلنا عليها في (٦, ١٦)، $i = 1,\ldots,q$ ، $j = 1,\ldots,q$. ولكن:

$$GG' = H\,T^{-1}\,T'^{-1}\,H' = H(X'X)^{-1}\,H' = HCH' \qquad (٦, ١٧)$$

لنرمز الآن للمقدار $G\underline{t} - \underline{h}$ بالرمز g وهو متجه $qx1$، ولنحسب $G\underline{t}$ فنجد:

$$G\underline{t} = H\,T^{-1}\,T'^{-1}\,X'\underline{Y} = H(X'X)^{-1}\,X'\underline{Y} = H\,\underline{\hat{\beta}} \qquad (٦, ١٧)$$

وبالتالي فإن:

$$\underline{g} = G\,\underline{t} - \underline{h} = H\,\underline{\hat{\beta}} - \underline{h} \qquad (٦, ١٨)$$

هو ما نحتاجه في (١٥ , ٦) لحساب إحصاء الاختبار W.

لنشكل الآن الهيئة:

$$[GG'\,|\,g] \qquad (٦, ١٩)$$

ونلاحظ أن GG' مصفوفة متناظرة $q{\times}q$ رتبتها q، فهي موجبة محددة متناظرة وتنطبق عليها شروط النظرية التي تقف وراء طريقة الجذر التربيعي. وبالتالي توجد مصفوفة مثلثة عليا ولنرمز لها بالرمز T_0 بحيث يكون $GG' = T_0'T_0$. وبتطبيق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة في(١٨ ,٦)، ويمكن كتابتها الآن على الشكل $[T_0'T_0|g]$ ، نحصل بعد الحسابات على $[T_0\,|\,\underline{t}_0]$ حيث:

$$\underline{t}_0 = T_0'^{-1}\,\underline{g} \qquad (٦, ٢٠)$$

لنأخذ الآن مجموع مربعات عناصر المتجه $\underline{t}_0$ فنجد :

$$\underline{t}'_0\,\underline{t}_0 = \underline{g}'T_0^{-1}\,T_0'^{-1}\,\underline{g} = \underline{g}'(T_0'T_0)^{-1}\,\underline{g} = \underline{g}'(GG')^{-1}\,\underline{g}$$

وبالاستفادة من (١٧ , ٦) و (١٨ , ٦) نجد :

$$\underline{t}'_0\,\underline{t}_0 = (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'(HCH')^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \qquad (٦, ٢١)$$

وهو بالضبط ما نحتاجه في بسط العبارة (١٥ ,٦). لحساب الإحصاء W. ويمكن كتابة W الآن حسابيا على الشكل :

$$W = \frac{\underline{t}'_0\,\underline{t}_0}{\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{t}'\underline{t}}\;\frac{n-p}{q} \qquad (٦, ٢٢)$$

مثال (٦): (من مثال ص٢٣٨ من كتاب Graybill ١٩٧٦) في دراسة نموذج خطي، تناولت 36 مشاهدة، كان مجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\underline{Y} = 77$ وكانت المعادلات الناظمية كما يلي :

$$4\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 + 2\hat{\beta}_4 = 14$$
$$2\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 + 3\hat{\beta}_4 = 11$$
$$2\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + 3\hat{\beta}_3 + 4\hat{\beta}_4 = 11$$
$$2\hat{\beta}_1 + 3\hat{\beta}_2 + 4\hat{\beta}_3 + 10\hat{\beta}_4 = 19$$

(أ) احسب التقديرات النقطية لمتجه المعالم $\underline{\beta}$ وللتباين σ^2.

(ب) احسب 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين $2\beta_1+\beta_2+3\beta_3-\beta_4$ و $2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3$.

(ج) اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ الفرضية :

$$H_0: \quad \begin{aligned} 2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 - \beta_4 &= 15 \\ -2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= -17 \end{aligned}$$

مقابل البديل H_1 أن إحدى المعادلتين على الأقل غير صحيحة.

الحل.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c|cc|cc}
 & S & & & \underline{s} & \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & H' & \\
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccc|c|cc|cc}
4 & 2 & 2 & 2 & 14 & 2 & 2 & 2 & -2\\
2 & 2 & 2 & 3 & 11 & 1 & 2 & 1 & -1\\
2 & 2 & 3 & 4 & 11 & 3 & 1 & 3 & 1\\
2 & 3 & 4 & 10 & 19 & -1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right]\\
\hline
\left[\begin{array}{cccc|c|cc|cc}
2 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0
\end{array}\right]\\
\begin{array}{cccc|c|cc|cc}
 & T & & & \underline{t} & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & G' & \\
\end{array}
\end{array}
$$

(أ) سجل المعادلات $T\hat{\underline{\beta}}=\underline{t}$ نجد $\hat{\beta}_4=1$ ، $\hat{\beta}_3=-1$ ، $\hat{\beta}_2=3$ ، $\hat{\beta}_1=2$.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\underline{Y}'\underline{Y}-\underline{t}'\underline{t}}{n-p}=\frac{77-69}{36-4}=0.25,\ \hat{\sigma}=0.5$$

(ب) فترة الثقة للتركيب الخطي الأول هي :

$$\underline{a}'_1\,\underline{t}\pm t_{.025}\,(32)\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{a}'_1\underline{a}_1}=3\pm2.35(.5)(3)=3\pm3.525$$
$$=[-0.525,\ 6.525]$$

فترة الثقة للتركيب الخطي الثاني هي :

$$\underline{a}'_2\,\underline{t}\pm t_{.025}\,(32)\,\hat{\sigma}\sqrt{\underline{a}'_2\underline{a}_2}=9\pm2.35(.5)(2)=9\pm2.35$$
$$=[6.65,\ 11.35]$$

(ج) لاختبار الفرضية H_0 نشكل الهيئة $[GG'\,|\,g]$ ونطبق عليها التقنية الحسابية لطريقة الجذر التربيعي فنجد :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|c}
GG' & & g
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cc|c}
9 & 3 & -12\\
 & 5 & 10\\
\hline
3 & 1 & -4\\
 & 2 & 7
\end{array}\right]\\
\begin{array}{cc|c}
T_0 & & \underline{t}_0
\end{array}
\end{array}
$$

ثم نحسب إحصاء الاختبار W :

$$W = \frac{\underline{t}'_0 - \underline{t}_0}{q\hat{\sigma}^2} = \frac{(-4)^2 + (7)^2}{2(.25)} = \frac{65}{.5} = 130$$

ولدينا من جدول التوزيع إف ، $F_{.05}(2, 32) = 3.31$ ، وبما أن $W = 130 > 3.31$ إننا نرفض H_0.

حالة خاصة. لاختبار الفرضية $H_0: \underline{\beta}_2 = \underline{b}_2$ مقابل $H_0: \underline{\beta}_2 \neq \underline{b}_2$ حيث $\underline{b}_2$ متجه من الثوابت ، و$\underline{\beta}_2$ متجه $q{\times}1$ يتضمن المعالم الـ q الأخيرة من متجه المعالم $\underline{\beta}$ ، ونعني المعالم β_{p-q+1} ، β_{p-q+2} ، ... ، β_p. سنستعرض في البداية طريقة الحساب عندما يكون $\underline{b}_2 = \underline{0}$ ، وقد وجدنا في (٥, ٥١). أن إحصاء الاختبار W يصبح في هذه الحالة :

$$W = \frac{\underline{\hat{\beta}}'_2 C_{22}^{-1} \underline{\hat{\beta}}_2}{q\hat{\sigma}^2} \qquad (٦, ٢٣)$$

ولحساب البسط $\underline{\hat{\beta}}'_2 C_{22}^{-1} \underline{\hat{\beta}}_2$ نأخذ المصفوفتين $S = X'X$ و$C = S^{-1}$ بالصيغة المجزأة ، حيث تشكل الأعمدة الـ $p\text{-}q$ الأولى ، الجزء الأول ، وتشكل الأعمدة الـ q الأخيرة ، وهي الأعمدة المقابلة للمعالم التي تنطوي عليها الفرضية H_0 ، الجزء الآخر من المصفوفة. فيمكن عندئذ كتابة :

$$S = T'T = \begin{bmatrix} T'_{11} & 0 \\ T'_{12} & T'_{22} \end{bmatrix} \overset{\quad p\text{-}q \qquad q}{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}} = \overset{\quad p\text{-}q \qquad q}{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}}^{-1}$$

ومنه يمكن كتابة :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T'_{11}T_{11} & T'_{11}T_{12} \\ T'_{12}T_{11} & T'_{12}T_{21} + T'_{22}T_{22} \end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من (١, ٢٤). نجد :

$$\begin{aligned} C_{22}^{-1} &= S_{22} - S_{21}\, S_{11}^{-1} S_{12} \\ &= T'_{12}T_{12} + T'_{22}T_{22} - T'_{12}T_{11}\,(T'_{11}T_{11})^{-1}\, T'_{11}T_{12} \\ &= T'_{12}T_{12} + T'_{22}T_{22} - T'_{12}T_{12} = T'_{22}T_{22} \end{aligned}$$

وهذا يسمح بكتابة :

$$T_{22}'^{-1}\, C_{22}^{-1}\, T_{22}^{-1} = I_q \qquad (٦, ٢٤)$$

لنعد إلى المعادلات الناظمية في صيغتها المختزلة $T\underline{\hat{\beta}} = \underline{t}$ ولنكتب هذه الصيغة المختزلة بالشكل المجزأ فنجد:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\beta}}_1 \\ \underline{\hat{\beta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \\ \underline{t}_2 \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن كتابة $T_{22}\, \underline{\hat{\beta}}_2 = \underline{t}_2$ أو:

$$\underline{\hat{\beta}}_2 = T_{22}^{-1}\, \underline{t}_2 \qquad (٦, ٢٥)$$

ويصبح البسط في (٢٣ , ٦) كما يلي:

$$\underline{\hat{\beta}}'_2 C_{22}^{-1}\, \underline{\hat{\beta}}_2 = \underline{t}'_2\, T_{22}'^{-1}\, C_{22}^{-1}\, T_{22}^{-1}\, \underline{t}_2 = \underline{t}'_2\, \underline{t}_2 \qquad (٦, ٢٦)$$

وذلك بالاستفادة من (٦, ٢٤). ويصبح إحصاء الاختبار في (٦, ٢٣). كما يلي:

$$W = \frac{\underline{t}'_2\, \underline{t}_2}{q\hat{\sigma}^2} = \frac{\underline{t}'_2\, \underline{t}_2}{\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{t}'\underline{t}} \cdot \frac{n-p}{q} \qquad (٦, ٢٧)$$

ولحساب البسط في (٦, ٢٣) يكفي إذن حساب مجموع مربعات العناصر الـ q الأخيرة من المتجه $\underline{t} = T'^{-1}\, \underline{s}$ الذي نحصل عليه عند تطبيق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}]$.

والسؤال الذي يبرز الآن هو كيف تصبح الحسابات عند اختبار الفرضية H_0: $\underline{\beta}_2 = \underline{b}_2$ مقابل H_1: $\underline{\beta}_2 \neq \underline{b}_2$ حيث $\underline{b}_2 \neq \underline{0}$؟ وللإجابة نعود إلى النموذج الخطي في شكله المجزأ $\underline{Y} = X_1\underline{\beta}_1 + X_2\underline{\beta}_2 + \underline{\varepsilon}$ ونقوم بالتحويل البسيط التالي من المتغيرات إلى المتغيرات $\underline{Z} = \underline{Y} - X_2\underline{b}_2$، لاحظ أن $X_2\underline{b}_2$ متجه $nx1$ من الثوابت المعروفة. ولنكتب النموذج بدلالة المتغيرات الجديدة $\underline{Z}$ فنجد:

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \underline{Y} - X_2\underline{b}_2 &= X_1\underline{b}_1 + X_2(\underline{\beta}_2 - \underline{b}_2) + \underline{\varepsilon} \\ &= X_1\underline{\beta}_1^* + X_2\underline{\beta}_2^* + \underline{\varepsilon} \end{aligned} \qquad (٦, ٢٨)$$

حيث $\underline{\beta}_1^* \equiv \underline{\beta}_1$ و $\underline{\beta}_2^* \equiv \underline{\beta}_2 - \underline{b}_2$. ويصبح المطلوب هو اختبار الفرضية $H_0 : \underline{\beta}_2^* = \underline{0}$ مقابل $H_1 : \underline{\beta}_2^* \neq \underline{0}$ في هذا النموذج مما تنطبق عليه قاعدة الحسابات التي وجدناها آنفا في (٦, ٢٧). وهكذا نجد أنه لاختبار الفرضية $H_0: \underline{\beta}_2 = \underline{b}_2$ حيث $\underline{b}_2 \neq \underline{0}$ ، نبدأ بحساب، $\underline{Z} = \underline{Y} - X_2 \underline{b}_2$ ثم نحسب :

$$X'\underline{Z} = X'(\underline{Y} - X_2\, b_2) = X'\underline{Y} - X'X_2\, \underline{b}_2 \qquad (٦, ٢٩)$$

لنرمز للمتجه $X'\underline{Z}$ بالرمز $\underline{s}^*$، فننطلق من الهيئة $[S|\underline{s}^*]$ ونطبق عليها طريقة الجذر التربيعي لنجد $[T|\underline{t}^*]$ ، ثم نحسب $\hat{\sigma}^2$ ، إذا لم نكن حسبناها سابقا من العلاقة $(n-p)\hat{\sigma}^2 = \underline{Z}'\underline{Z} - \underline{t}^{*\prime}\underline{t}^*$ ، ويمكن بسهولة تبيان أن قيمة $\hat{\sigma}^2$ هنا مطابقة لقيمتها محسوبة من النموذج الأصلي وقد تركنا ذلك كتمرين للطالب.

ثم نحسب إحصاء الاختبار من العلاقة :

$$W = \frac{\underline{t}_2^{*\prime}\, \underline{t}_2^*}{q\,\hat{\sigma}^2} \qquad (٦, ٣٠)$$

وإحصاء الاختبار في هذه الحالة يساوي مجموع مربعات الـ q عنصرا الأخيرة من المتجه $\underline{t}^*$ مقسوما على $q\,\hat{\sigma}^2$. وتجدر ملاحظة أن المصفوفة $X'X_2$ هي الأعمدة الـ q الأخيرة من المصفوفة $S = X'X$ ، وأبعاد المصفوفة $X'X_2$ هي $p{\times}q$.

مثال (٧): (من مثال ص٢٤٣ من كتاب Graybill ١٩٧٦)

في دراسة للنموذج الخطي $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ ؛ $i = 1,\ldots,25$ ، كانت المعادلات الناظمية كما يلي :

$$\begin{aligned}
25\hat{\beta}_0 + 5\hat{\beta}_1 - 10\hat{\beta}_2 - 15\hat{\beta}_3 - 5\hat{\beta}_4 &= 10\\
5\hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 &= 1\\
-10\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 + 9\hat{\beta}_2 + 3\hat{\beta}_3 + 6\hat{\beta}_4 &= -15\\
-15\hat{\beta}_0 - 2\hat{\beta}_1 + 3\hat{\beta}_2 + 23\hat{\beta}_3 - 3\hat{\beta}_4 &= 39\\
-5\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2 - 3\hat{\beta}_3 + 14\hat{\beta}_4 &= -45
\end{aligned}$$

وكان مجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\underline{Y}=810$. والمطلوب اختبار الفرضية $H^0: \beta_3=\beta_4=0$ مقابل البديل H_1 أن إحدى المعلمتين β_3 ، β_4 ، على الأقل لا تساوي الصفر.

الحل. نطبق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}]$ فنجد :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} S & \underline{s} \end{array}\\
\left[\begin{array}{rrrrr|r}
25 & 5 & -10 & -15 & -5 & 10\\
 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1\\
 & & 9 & 3 & 6 & -15\\
 & & & 23 & -3 & 39\\
 & & & & 14 & -45\\
\hline
5 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2\\
 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1\\
 & & 2 & -2 & 1 & -5\\
 & & & 3 & -2 & 12\\
 & & & & 2 & -6
\end{array}\right]\\
\begin{array}{cc} T & \underline{t} \end{array}
\end{array}$$

لدينا هنا $\underline{t}_2=\begin{bmatrix}12\\-6\end{bmatrix}$ ويكون احصاء الاختبار، وفقا للعلاقة (٦ , ٢٧) كما يلي :

$$W=\frac{\underline{t}'_2\,\underline{t}_2}{\underline{Y}'\underline{Y}-\underline{t}'\underline{t}}\;\frac{n-p}{q}=\frac{12^2+(-6)^2}{810-255}\;\frac{25-5}{2}=3.24$$

وبما أن $W=3.24<F_{.05}\,(2,20)=3.49$ فلا نرفض H_0.

مثال (٨): في المثال السابق اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha=.05$ الفرضية $\beta_4=2$ ، $H_0{:}\beta_3=1$ مقابل البديل H_1 أن $\beta_3\neq 1$ أو $\beta_4\neq 2$.

الحل : المعلمتان β_3 وβ_4 يقابلها العمودان الأخيران من المصفوفة S (العمود الرابع والعمود الخامس) وهكذا يكون :

$$X'X_2 = \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 23 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$$

ولدينا $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، وبالتالي :

$$X'X_2\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 15 \\ 17 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ويكون $\underline{s}^*$ كما يلي :

$$\underline{s}^* = X'\underline{Y} - X'X_2\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \\ -30 \\ 22 \\ -70 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق طريقة الجذر التربيعي على الهيئة $[S|\underline{s}^*]$ نجد :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 25 & 5 & -10 & -15 & -5 & 35 \\ & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ & & 9 & 3 & 6 & 15 \\ & & & 23 & -3 & 17 \\ & & & & 14 & 25 \\ \hline 5 & 1 & -2 & -3 & -1 & 7 \\ & 1 & 1 & 1 & 2 & -7 \\ & & 2 & -1 & 1 & 18 \\ & & & 3 & -2 & 27 \\ & & & & 2 & 41 \end{array}\right]$$

وإحصاء الاختبار وفقا للعلاقة (٦,٣٠) هو :

$$W = \frac{\dot{\underline{t}}_2' \dot{\underline{t}}_2}{q\hat{\sigma}^2} = \frac{(27)^2 + (41)^2}{2\hat{\sigma}^2}$$

ومن المثال السابق لدينا :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{810 - 255}{55.5} = 27.75$$

وبالتالي :

$$W = \frac{2410}{55.5} = 43.423$$

وبما أن $W = 43.423 > F_{.95}\,(2,20) = 3.49$ فإننا نرفض H_0.

(٧ , ٦) تمارين

١ - ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$ ، حيث $\underline{Y}$ متجه عشوائي 36×1 ، $\underline{Y}'\underline{Y} = 138$ ، والمعادلات الناظمية هي :

$$4\hat{\beta}_1 + 8\hat{\beta}_2 - 4\hat{\beta}_3 + 2\hat{\beta}_4 = 4$$
$$8\hat{\beta}_1 + 20\hat{\beta}_2 - 10\hat{\beta}_3 + 6\hat{\beta}_4 = 12$$
$$-4\hat{\beta}_1 - 10\hat{\beta}_2 + 6\hat{\beta}_3 - 4\hat{\beta}_4 = -6$$
$$2\hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2 - 4\hat{\beta}_3 + 12\hat{\beta}_4 = 7$$

استخدم طريقة الجذر التربيعي لإيجاد :

(أ) المقدرات النقطية لـ$\underline{\beta}$ وσ^2.

(ب) 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين.

$$4\beta_1 + 2\beta_3 - 7\beta_4 \quad ، \quad 2\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4$$

(ج) اختبر الفرضية :

$$H_0: \quad \begin{array}{l} 2\beta_1 + 6\beta_2 - 4\beta_3 = 2 \\ 2\beta_1 + \beta_3 - 2\beta_4 = -2 \end{array}$$

عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

(د) اختبر الفرضية $H_0: \beta_3 = \beta_4 = 0$ عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

٢- ليكن النموذج الخطي العام:

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i \,;\, i = 1,\ldots,25$$

حيث $\underline{\varepsilon} \sim N_{25}(\underline{0}, \sigma^2 I_{25})$. والمعادلات الناظمية هي:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 14 & 11 \\ 8 & 0 & 11 & 58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 66 \\ 91 \end{bmatrix}$$

و$\underline{Y}'\underline{Y} = 874$. استخدم طريقة الجذر التربيعي الحسابية لإيجاد:

(أ) المقدرات النقطية للمعالم $\underline{\beta}$ ، σ^2.

(ب) 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين:

$$2\beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 + 3\beta_4 \quad \text{و} \quad 2\beta_1 + 2\beta_3 - 4\beta_4$$

(ج) اختبر الفرضية:

$$H_0: \quad \begin{array}{l} 2\beta_1 + 6\beta_2 - \beta_3 - 14\beta_4 = 43 \\ 2\beta_1 + 2\beta_3 + 13\beta_4 \quad = -4 \end{array}$$

وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .01$.

٣- ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_{16})$ ، ومجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\underline{Y} = 54$. والمعادلات الناظمية هي:

$$\begin{aligned} 16\hat{\beta}_0 + 8\hat{\beta}_1 + 4\hat{\beta}_2 - 4\hat{\beta}_3 &= 4 \\ 8\hat{\beta}_0 + 5\hat{\beta}_1 + 3\hat{\beta}_2 \qquad &= 5 \\ 4\hat{\beta}_0 + 3\hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2 + 3\hat{\beta}_3 &= 0 \\ -4\hat{\beta}_0 + 3\hat{\beta}_2 + 7\hat{\beta}_3 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

استخدم طريقة الجذر التربيعي لإيجاد:

(أ) المقدرات النقطية للمعالم $\underline{\beta}$ ، σ^2.

(ب) 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين.

$$8\beta_0 + 5\beta_1 + 9\beta_2 + 4\beta_3 \quad ، \quad 4\beta_0 + 5\beta_1 + \beta_2 + 5\beta_3$$

(ج) اختبر الفرضية $H_3: \beta_2 = \beta_3 = 0$ عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

٤- ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $\underline{\varepsilon} \sim N_{36}(\underline{0}, \sigma^2 I_{36})$ ، والمعادلات الناظمية هي :

$$\begin{bmatrix} 9 & 27 & 3 & 30 \\ 27 & 85 & 17 & 92 \\ 3 & 17 & 26 & 14 \\ 30 & 92 & 14 & 102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 223 \\ 27 \\ 250 \end{bmatrix}$$

ومجموع مربعات المشاهدات $\underline{Y}'\underline{Y} = 663$. استخدم طريقة الجذر التربيعي الحسابية لإيجاد :

(أ) المقدرات النقطية للمعالم $\underline{\beta}$ ، σ^2.

(ب) $(X'X)^{-1}$.

(ج) اختبر الفرضية :

$$H_0: \begin{array}{l} 3\beta_1 + 7\beta_2 + 8\beta_4 = 19 \\ 3\beta_1 + \beta_2 - 3\beta_3 + 5\beta_4 = 22 \end{array}$$

عند مستوى الأهمية $\alpha = .01$.

(د) اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .01$ الفرضية $H_0: \beta_3 = \beta_4 = 0$.

٥- ليكن النموذج الخطي العام :

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i \,;\; i = 1, \ldots, 36$$

حيث $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$ وحيث :

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & 3 \\ & & 3 & 4 \\ & & & 10 \end{bmatrix}, \ X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \\ 19 \end{bmatrix}, \underline{Y}'\underline{Y} = = 581$$

استخدم طريقة الجذر التربيعي لإيجاد :

(أ) المقدرات النقطية للمعالم $\underline{\beta}$ ، σ^2.

(ب) $(X'X)^{-1}$.

(ج) 90% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين في المعالم.

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 \quad \text{و} \quad 2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 - \beta_4$$

(د) اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ الفرضية :

$$H_0: \begin{array}{l} 2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 - \beta_4 = 15 \\ -2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = -17 \end{array}$$

٦- ليكن النموذج الخطي العام $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $\underline{\varepsilon} \sim N_{36}(\underline{0}, I_{36})$ ، والمعادلات الناظمية $S\underline{\hat{\beta}} = \underline{s}$ حيث :

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 26 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \ \underline{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

و $\underline{Y}'\underline{Y} = 74$. والمطلوب إيجاد :

(أ) S^{-1} باستخدام طريقة الجذر التربيعي.

(ب) المقدرات النقطية للمعالم $\underline{\beta}$ باستخدام طريقة الجذر التربيعي ثم باستخدام الصيغة $\underline{\hat{\beta}} = S^{-1}\underline{s}$.

(ج) 95% فترة ثقة لكل من التركيبين الخطيين في المعالم.

$$4\beta_1 + 3\beta_2 - 3\beta_3 + 2\beta_4 \quad ، \quad 2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_4$$

وذلك باستخدام طريقة الجذر التربيعي.

(د) اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ الفرضية :

$$H_0: \begin{array}{l} 2\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 + 2\beta_4 = -13 \\ 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = -18 \end{array}$$

مستخدما طريقة الجذر التربيعي.

٧- بيّن أن $\hat{\sigma}^2$ محسوباً من النموذج $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ مطابق لِ $\hat{\sigma}^2$ محسوباً من النموذج المحوّل وفق الصيغة في (٢٨ ,٦).

الفصل السابع

نماذج التصميم

(٧,١) مقدمة

لقد درسنا في الفصول السابقة بعض النماذج الخطية العامة. وسنقدم في هذا الفصل نماذج التصميم ونتناول بشيء من التفصيل حالة خاصة منها وهي نماذج التصميم أحادية العامل.

تعريف (١): تعريف نموذج التصميم Design Model : لنعتبر النموذج الخطي العام $\underline{Y}= X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ حيث $\underline{Y}$ متجه عشوائي قابل للمشاهدة أبعاده $n\times1$ و X مصفوفة من القيم المشاهدة غير العشوائية ذات بعد $n\times p$ ورتبتها p حيث $n>p$ و $\underline{\beta}$ متجه من المعالم المجهولة أبعاده $p\times1$ و $\underline{\varepsilon}$ متجه عشوائي غير مشاهد أبعاده $n\times1$. فيعرف هذا النموذج بأنه نموذج تصميم إذا، وفقط إذا، كانت عناصر المصفوفة X مكونة من الأعداد 0 أو 1 وكان لها نمط معين سيعرف لاحقًا.

ملاحظة (١): سنفترض في دراستنا هنا أن المتجه العشوائي غير المشاهد $\underline{\varepsilon}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات $N_n(\underline{0},\sigma^2 I_n)$. أي أن عناصر المتجه $\underline{\varepsilon}$ هي متغيرات عشوائية مستقلة ويتوزع كل واحد منها وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين σ^2.

(٢ , ٧) التقدير النقطي لنموذج التصميم

سنستعرض في هذه الفقرة بعضًا من النظريات والنتائج المفيدة في مسائل التقدير النقطي لنماذج التصميم، مما وجدناه في الفصل الخامس، ونعيده هنا على سبيل التذكير.

نظرية (١): لنعتبر النموذج المعطى في التعريف (١) والملاحظة (١) أعلاه فعندئذ:

١- معادلات المربعات الصغرى (المعادلات الناظمية) هي:

$$X'X\underline{\hat{\beta}} = X'\underline{Y} \qquad (٧, ١)$$

٢ - مقدر المربعات الصغرى (Least Square Estimator) للمتجه $\underline{\beta}$ هو:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y} \qquad (٧, ٢)$$

٣- المقدر $\underline{\hat{\beta}}$ المعطى بالصيغة (٢ , ٧) هو أفضل مقدر خطي غير منحاز (Best Linear Unbiased Estimator) للمتجه $\underline{\beta}$ أو بعبارة أخرى فهو مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator) للمتجه $\underline{\beta}$.

٤- أفضل مقدر خطي غير منحاز لتركيب خطي $\underline{l}'\underline{\beta}$ هو المقدر $\underline{\hat{\beta}}'\underline{l}$. حيث $\underline{l}$ متجه معلوم ذو بعد $p\times 1$.

٥- المقدر:

$$\hat{\sigma}^2 = (n-p)^{-1}(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}) \qquad (٧, ٣)$$

هو مقدر غير منحاز ذي تباين أصغري بانتظام للتباين σ^2.

٦- يتوزع المتغير العشوائي:

$$U = (n-p)\ \hat{\sigma}^2/\sigma^2 \qquad (٧, ٤)$$

وفق توزيع كاي مربع χ^2 بـ $(n-p)$ درجة حرية، أي أن:

$$U = (n-p)\ \hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-p)$$

نظرية (٢). لنعتبر النموذج المعطى في التعريف (١) والملاحظة (١) وبافتراض أن 'L مصفوفة عناصرها ثوابت، أبعادها $q\times p$، ورتبتها q حيث $p\geq q$ فعندئذ:

١- المتجه العشوائي $L'\underline{\hat{\beta}}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بعدة متغيرات بمتوسط:

$$E(L'\underline{\hat{\beta}}) = L'\underline{\beta} \qquad (٧, ٥)$$

وبمصفوفة تباين:

$$V = var(L'\underline{\hat{\beta}}) = \sigma^2 L'(X'X)^{-1}L \qquad (٧, ٦)$$

أي أن:

$$L'\underline{\hat{\beta}} \sim N_q(L'\underline{\beta}, \sigma^2 L'(X'X)^{-1}L)$$

٢- المتجه العشوائي $L'\underline{\hat{\beta}}$ مستقل عن المتغير العشوائي U المعرف بالعلاقة (٧, ٤).

مثال (١): لنعتبر النموذج الخطي $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ الوارد المثال (٨) من الفصل الرابع. إن هذا النموذج هو أحد نماذج التصميم إذ يمكن كتابته على الصيغة $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ حيث:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

فالمعادلات الناظمية لهذا النموذج وفق العلاقة (١ , ٧) هي:

$$X'X\underline{\hat{\beta}} = X'\underline{Y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 3\hat{\mu}_1 = Y_{1\bullet} \\ 3\hat{\mu}_2 = Y_{2\bullet} \end{matrix}$$

حيث $Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}$. لاحظ أن:

$$X'X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن مقدر المربعات الصغرى للمتجه $\underline{\beta}$ بناء على العلاقة (٢ ,٧) هو:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{1\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن :

$$\mu_1 = (1, 0)\, \underline{\beta} = \underline{l}'_1 \underline{\beta}\ , \qquad \mu_2 = (0, 1)\, \underline{\beta} = \underline{l}'_2\, \underline{\beta}$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للمعلمتين μ_1 و μ_2 وفقًا للعلاقة (٤) في النظرية (١) هما على التوالي :

$$\hat{\mu}_1 = \underline{l}'_1 \underline{\hat{\beta}} = (1, 0) \begin{bmatrix} \overline{Y}_{1\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} \end{bmatrix} = \overline{Y}_{1\bullet}$$

$$\hat{\mu}_2 = \underline{l}'_2 \underline{\hat{\beta}} = (0, 1) \begin{bmatrix} \overline{Y}_{1\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} \end{bmatrix} = \overline{Y}_{2\bullet}$$

ووفقًا للعلاقة (١) من النظرية (٢) يتوزع المتغير $\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i\bullet}$ وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين هما، على الترتيب :

$$E(\hat{\mu}_i) = \underline{l}'_i\, \underline{\beta} = \mu_i,$$
$$var(\hat{\mu}_i) = \sigma^2\, \underline{l}'_i\, (X'X)^{-1}\, \underline{l}_i = \sigma^2/3; \quad (i=1, 2)$$

أي أن :

$$\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i\bullet} \sim N(\mu_i, \sigma^2/3); \quad (i=1, 2)$$

ولإيجاد المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للتباين σ^2 نستخدم العلاقة (٤ ,٧) فنجد الكميات التالية :

$$\underline{Y}'\underline{Y} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} Y_{ij}^2\ ,\ X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1\bullet} \\ Y_{2\bullet} \end{bmatrix},\ \underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{1\bullet}\ ,\ \overline{Y}_{2\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1\bullet} \\ Y_{2\bullet} \end{bmatrix} = \frac{Y_{1\bullet}^2 + Y_{2\bullet}^2}{3},$$

$$\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{1\bullet}^2 + Y_{2\bullet}^2}{3} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للتباين σ^2 هو :

$$\hat{\sigma}^2 = (n-p)^{-1}\, (\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y}) = (6-2)^{-1} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2}{4}$$

(٣, ٧) اختبار الفرضيات وفترات الثقة لنموذج التصميم

سنناقش في هذه الفقرة النموذج المعطى في التعريف (١) والملاحظة (١). وعند اختبار الفرضيات لنموذج التصميم سنفترض أن المصفوفة H مصفوفة عناصرها ثوابت، أبعادها $q\times p$، ورتبتها q حيث $p\geq q$. وسنركز اهتمامنا فقط على اختبار فرضيات حول معالم النموذج من النوع $H_O: H\underline{\beta} = \underline{0}$ مقابل الفرضية $H_1: H\underline{\beta} \neq \underline{0}$. وبناءً على طبيعة المصفوفة H فإن $H\underline{\beta}$ هي مجموعة من التراكيب الخطية في $\underline{\beta}$ المستقلة خطيًا. وقياسًا على ما وجدناه في النظرية (٧) من الفصل الخامس تبين لنا النظرية التالية طريقة اختبار فرضية حول معالم نموذج تصميم.

نظرية (٣): لنعتبر النموذج المعطى في التعريف (١) والملاحظة (١)، وبافتراض أن H مصفوفة عناصرها ثوابت، أبعادها $q\times p$، ورتبتها q حيث $p\geq q$، فعندئذ تكون الإحصاءة W هي إحصاءة اختبار نسبة الإمكانية المعممة generalized likelihood ratio test statistic لاختبار الفرضية $H_O: H\beta = \underline{0}$ مقابل الفرضية $H_1: H\beta \neq \underline{0}$ حيث تعطى هذه الإحصاءة بإحدى الصيغتين التاليتين:

$$W = \frac{(H\underline{\hat{\beta}})'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta})}{q\hat{\sigma}^2} \quad (٧, ٧)$$

$$W = \frac{(\hat{\sigma}_R^2-\hat{\sigma}_F^2)/q}{\hat{\sigma}_F^2/(n-p)} = \left(\frac{\hat{\sigma}_R^2-\hat{\sigma}_F^2}{\hat{\sigma}_F^2}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right) \quad (٧, ٨)$$

$\hat{\sigma}_F^2$ هو مقدر الإمكانية العظمى للتباين σ^2 وفق النموذج التام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ و $\hat{\sigma}_R^2$ هو مقدر الإمكانية العظمى للتباين σ^2 للنموذج المخفض $\underline{Y}=B\underline{\gamma}+\underline{\varepsilon}$ تحت الفرضية $H_O: H\underline{\beta} = \underline{0}$. أي أن:

$$\hat{\sigma}_F^2 = (1/n)\,(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y})$$
$$\hat{\sigma}_R^2 = (1/n)\,(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\gamma}}'B'\underline{Y})$$

حيث :

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$
$$\underline{\hat{\gamma}} = (B'B)^{-1}B'\underline{Y}$$

وتتوزع الإحصاءة W وفق توزيع F اللامركزي (Non-central F-distribution) بدرجات الحرية q و $n-p$ و معلمة اللامركزية λ المعطاه بالصيغة التالية :

$$\lambda = (2\sigma^2)^{-1}(H\underline{\beta})'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\underline{\beta}) \qquad (٧,٩)$$

ويصبح هذا التوزيع توزيعًا مركزيًا إذا، وفقط إذا، كانت الفرضية H_0 صحيحة، أي أن :

$$W \sim F(q, n-p; \lambda)$$

ونرفض الفرضية $H_0: H\underline{\beta} = \underline{0}$ عند مستوى الدلالة α مقابل الفرضية $H_1: H\underline{\beta} \neq \underline{0}$ إذا كانت قيمة الإحصاءة W المحسوبة تحقق :

$$w \geq F_{\alpha;\, q,\, n-p}$$

إن دالة القوة (Power Function) لهذا الاختبار هي :

$$\pi(\lambda) = \int_{F_{\alpha;q,n-p}}^{\infty} F(w : q, n-p; \lambda)\, dw \,.$$

بعد أن استعرضنا طريقة اختبار فرضية حول معالم نموذج التصميم فإننا نذكر فيما يلي نظرية تعطي طريقة لوضع فترات ثقة حول معالم نموذج تصميم مستندين إلى ما وجدناه في (٥, ٨).

نظرية (٤): لنعتبر النموذج في التعريف (١) والملاحظة (١) وليكن $\underline{l}'\underline{\beta}$ أي تركيب خطي في متجه المعالم $\underline{\beta}$. فتعطى فترة الثقة، بمعامل ثقة $(1-\alpha)$، للتركيب الخطي $\underline{l}'\underline{\beta}$ بالصيغة التالية :

$$\underline{l}'\underline{\hat{\beta}} \pm t_{\alpha/2;\, n-p}\sqrt{\hat{\text{var}}(l'\hat{\beta})} \qquad (٧, ١٠)$$

والتي يمكن كتابتها على النحو:

$$\underline{l}'(X'X)^{-1}X'\underline{Y} \pm t_{\alpha/2;\,n-p}\sqrt{\hat{\sigma}^2 l'(X'X)^{-1}l} \qquad (٧, ١١)$$

(٤, ٧) نموذج التصميم برتبة غير تامة

عندما تكون المصفوفة X غير تامة الرتبة أي عندما تكون رتبة المصفوفة X تساوي k و $p>k$ فيسمى النموذج في هذه الحالة نموذج الرتبة غير التامة. وللتعامل مع هذه الحالة فلابد لنا من التطرق، بصورة عامة، لما يسمى بالمعكوس الشرطي (Conditional Inverse) للمصفوفة. فالمعكوس الشرطي للمصفوفة A ويرمز له بالرمز A^c هو أي مصفوفة تحقق الشرط $AA^cA=A$. وفي حالة نموذج الرتبة غير التامة يمكن تطبيق النظريات السابقة (نظرية (١) إلى نظرية (٤)) ولكن باستبدال المصفوفة $(X'X)^c$ وهي المعكوس الشرطي للمصفوفة X'X بالمصفوفة $(X'X)^{-1}$ وكذلك استبدال القيمة k بالقيمة p. مع ملاحظة أن مقدر المربعات الصغرى للمتجه $\underline{\beta}$ في هذه الحالة لن يكون وحيدًا، وذلك لأن المعكوس الشرطي لمصفوفة قد لا يتمتع بالوحدانية. وسيكون مقدر المربعات الصغرى $\underline{\hat{\beta}}$ أي حل للمعادلات الناظمية $X'X\underline{\hat{\beta}}=X'\underline{Y}$. والحال العام هو:

$$\underline{\hat{\beta}}=(X'X)^c X'\underline{Y} + [\,I-(X'X)^c(X'X)]\underline{b} \quad ,\underline{b}\in \mathbf{R}^p$$

حيث I مصفوفة الوحدة والمتجه $\underline{b}$ هو أي متجه في الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^p$.

تعريف (٢): الدالة القابلة للتقدير (Estimable Function). نقول أن الدالة الخطية $\underline{l}'\underline{\beta}$ في المعالم $\underline{\beta}$ قابلة للتقدير إذا، وفقط إذا، وجد لها مقدر غير منحاز على شكل دالة خطية في عناصر المتجة $\underline{Y}$. أي أن $\underline{l}'\underline{\beta}$ قابلة للتقدير إذا، وفقط إذا، وجد متجه $\underline{a}\in\mathbf{R}^n$ بحيث يكون $E(\underline{a}'\underline{Y})=\underline{l}'\underline{\beta}$.

نظرية (٥): العبارات التالية متكافئة:

(أ) الدالة الخطية $\underline{l}'\underline{\beta}$ دالة قابلة للتقدير.

(ب) يوجد متجه $\underline{a}$ ذو بعد $n\times 1$ بحيث أن $\underline{l}=X'\underline{a}$.

(ج) المتجه $\underline{l}$ هو تركيب خطي في متجهات الأعمدة للمصفوفة X'، أي أن المتجه $\underline{l}$ ينتمي إلى فضاء متجهات الأعمدة للمصفوفة X'. وبشكل مكافئ فإن المتجه $\underline{l}'$ هو تركيب خطي في متجهات سطور المصفوفة X، أي أن المتجه $\underline{l}'$ ينتمي إلى فضاء متجهات السطور للمصفوفة X.

(د) $\text{rank}[X', \underline{l}]= \text{rank}[X']$.

(هـ) $\text{rank}[X'X, \underline{l}]= \text{rank}[X'X]$.

(و) يوجد حل $\underline{r}$ للمعادلات $X'X\underline{r}=\underline{l}$.

(ز) $\underline{l}'X^cX=\underline{l}'$ لأي معكوس شرطي للمصفوفة X.

نظرية (٦): إذا كانت الدالة الخطية $\underline{l}'\underline{\beta}$ قابلة للتقدير فإن المقدر $\underline{l}'\underline{\hat{\beta}}$ لا متغير لأي حل $\underline{\hat{\beta}}$ للمعادلات الناظمية $X'X\underline{\hat{\beta}}=X'\underline{Y}$.

نتيجة (١): أي تركيب خطي في الجوانب اليسرى للمعادلات الناظمية تكون قابلة للتقدير.

مثال (٢): لنعتبر النموذج الخطي $Y_{ij} = \mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}$ وذلك كما في المثال (٨) في الفصل الرابع. إن هذا النموذج هو أحد نماذج التصميم برتبة غير تامة إذ يمكن كتابته على الصيغة $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ حيث :

$$\underline{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11}\\ Y_{12}\\ Y_{13}\\ Y_{21}\\ Y_{22}\\ Y_{23}\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix},\ \underline{\beta}=\begin{bmatrix}\mu\\ \tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix},\qquad \underline{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix}$$

فالمصفوفة X أبعادها 3×6 ورتبتها تساوي 2. لذلك فإن $n=6$ و $p=3$ و $k=2$.
ونلاحظ أن المتجهين $\underline{l}'_1=(1,1,0)$ و $\underline{l}'_2=(1,0,1)$ هما متجهان مستقلان خطيًا وينتميان إلى فضاء متجهات السطور للمصفوفة X ولذلك فإن دالتي التركيب الخطي $\underline{l}'_1\underline{\beta}$ و $\underline{l}'_2\underline{\beta}$ قابلتان للتقدير ومستقلتان خطيًا. كما أن أي دالة خطية تكون قابلة للتقدير إذا، وفقط إذا، كانت تركيبًا خطيًا في هاتين الدالتين.

لاحظ أن:

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

والمعادلات الناظمية هي:

$$X'X\,\underline{\hat{\beta}} = X'\underline{Y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 6\hat{\mu} + 3\hat{\tau}_1 + 3\hat{\tau}_2 = Y_{\bullet\bullet} \\ 3\hat{\mu} + 3\hat{\tau}_1 = Y_{1\bullet} \\ 3\hat{\mu} + 3\hat{\tau}_2 = Y_{2\bullet} \end{cases}$$

حيث $Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}$ و $Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}$. وعليه فإن أحد الحلول للمعادلات الناظمية أعلاه، أو أحد مقدرات المربعات الصغرى للمتجه $\underline{\beta}$، هو:

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن:

$$\underline{l}'_1\underline{\beta} = (1,1,0)\,\underline{\beta} = \mu+\tau_1, \qquad \underline{l}'_2\underline{\beta} = (1,0,1)\,\underline{\beta} = \mu+\tau_2$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للدالتين $\underline{l}'_1\underline{\beta}$ و $\underline{l}'_2\underline{\beta}$ هما على التوالي:

$$\underline{l}'_1\,\underline{\hat{\beta}} = (1,1,0)\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{bmatrix} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = (1,1,0)\begin{bmatrix} \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} = \overline{Y}_{1\bullet}$$

$$\underline{l}'_2 \underline{\hat{\beta}} = (1,0,1) \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{bmatrix} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 = (1,0,1) \begin{bmatrix} \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} = \overline{Y}_{2\bullet}$$

إن الدالة $\underline{l}'_3\underline{\beta} = \tau_1 - \tau_2$ قابلة للتقدير ذلك لأنها تشكل تركيبًا خطيًا في الدالتين $\underline{l}'_1\underline{\beta}$ و $\underline{l}'_2\underline{\beta}$ كما يتضح مما يلي :

$$\underline{l}'_3\underline{\beta} = \underline{l}'_1\underline{\beta} - \underline{l}'_2\underline{\beta} = (\mu+\tau_1) - (\mu+\tau_2) = \tau_1 - \tau_2$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للدالة $\underline{l}'_3\underline{\beta} = \tau_1 - \tau_2$ هو :

$$\underline{l}'_3 \underline{\hat{\beta}} = \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{2\bullet}$$

ولإيجاد المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للتباين σ^2 نحسب الكميات التالية :

$$\underline{Y}'\underline{Y} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} Y_{ij}^2 , \quad X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{\bullet\bullet} \\ Y_{1\bullet} \\ Y_{2\bullet} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y} = [\hat{\mu}, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \begin{bmatrix} Y_{\bullet\bullet} \\ Y_{1\bullet} \\ Y_{2\bullet} \end{bmatrix} = [\overline{Y}_{\bullet\bullet}, \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}, \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}] \begin{bmatrix} Y_{\bullet\bullet} \\ Y_{1\bullet} \\ Y_{2\bullet} \end{bmatrix} = \frac{Y_{1\bullet}^2 + Y_{2\bullet}^2}{3},$$

$$\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{1\bullet}^2 + Y_{2\bullet}^2}{3} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام للتباين σ^2 هو :

$$\hat{\sigma}^2 = (n-k)^{-1} (\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}' X'\underline{Y}) = (6-2)^{-1} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2}{4}$$

وهذا المقدر هو المقدر نفسه الذي حصلنا عليه في المثال (١).

إن أحد الحلول الأخرى للمعادلات الناظمية أو أحد مقدرات المربعات الصغرى الأخرى للمتجه $\underline{\beta}$ هو :

$$\underline{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{Y}_{1\bullet} \\ \bar{Y}_{2\bullet} \end{bmatrix}$$

لو قمنا باستخدام المقدر $\underline{\tilde{\beta}}$ بدلاً من المقدر $\underline{\hat{\beta}}$ أعلاه فإننا سنحصل على النتائج نفسها.

تعريف (٣): مصفوفة التصميم (Design Matrix). تكون المصفوفة X ذات البعد $n \times p$ مصفوفة تصميم إذا، وفقط إذا، كان من الممكن تجزئتها على الصورة $[X_o, X_1, ..., X_q]$ حيث X_i مصفوفة جزئية أبعاده $n \times q_i$ وتحقق ما يلي :

(أ) عناصر المصفوفة الجزئية X_i هي 1 أو 0.

(ب) كل سطر من سطور المصفوفة الجزئية X_i يحوي عنصرًا واحدًا فقط يساوي 1 والعناصر الأخرى الباقية تساوي 0.

(ج) كل عمود من أعمدة المصفوفة الجزئية X_i يحوي على الأقل عنصرًا واحدًا غير صفري.

مثال (٣): من أمثلة مصفوفات التصميم المصفوفتان الواردتان في المثالين (١) و (٢). فالمصفوفة X في المثال (٢)، مثلاً، يمكن كتابتها على الصورة $X = [X_o, X_1, X_2]$ حيث :

$$X_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

كما يمكن كتابتها على الصورة $X = [X_o, X_1]$ حيث :

$$X_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وفي كلا الحالتين فإن المصفوفة الجزئية X_i تحقق الشروط المذكورة في التعريف (٣).

(٥ , ٧) نموذج التصميم أحادي العامل

سنتناول في هذه الفقرة بشيء من التفصيل نموذج التصميم الذي يعرف بنموذج التصميم أحادي العامل. ويعتبر هذا النموذج من النماذج الهامة في الحياة العملية وذلك لشيوع تطبيقه في كثير من المجالات.

تعريف (٤): نموذج التصميم أحادي العامل One-Factor Design Model.

تعرف المواصفات التالية نموذج تصميم أحادي العامل :

(أ) إحدى صيغ النموذج تعطى بالشكل :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}\ ; \quad i = 1, 2, \ldots, I \quad ; j = 1, 2, \ldots, J_i$$

حيث أن $J_i \geq 1$ لكل i و $J_i > 1$ لقيمة واحدة على الأقل من قيم i.

(ب) الكميات Y_{ij} متغيرات عشوائية قابلة للمشاهدة.

(ج) الكميات ε_{ij} متغيرات عشوائية غير قابلة للمشاهدة تتوزع مستقلة بعضها عن بعض وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$.

(د) الكميات $\sigma^2, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_I$ هي معالم مجهولة وفضاء المعالم لها هو :

$$\Omega = \{(\sigma^2, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_I) : \sigma^2 > 0, -\infty < \mu < \infty, -\infty < \alpha_i < \infty; \quad i = 1, 2, \ldots, I\}$$

سنرمز للعامل تحت الدراسة بالرمز A وسنفرض أن عدد مستوياته يساوي I وسنرمز للمستوى رقم i بالرمز A_i. كما سنرمز لتأثير مستوى العامل رقم i بالرمز α_i وسنرمز لمتوسط قيم مستوى العامل رقم i بالرمز $\mu_i=\mu+\alpha_i$. كما سنعرف التأثير الرئيس لمستوى العامل رقم i بأنه $\alpha_i - \overline{\alpha}$ حيث أن $\overline{\alpha} = I^{-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i$.

لتحليل هذا النموذج نحتاج أولاً إلى تحديد مقدرات معالم النموذج $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_I$. ومن الواضح أن هذا النموذج هو أحد نماذج التصميم إذ يمكن كتابته على الصيغة $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ حيث :

$$\underline{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11}\\ \vdots \\ Y_{1J_1}\\ \hline Y_{21}\\ \vdots\\ Y_{2J_2}\\ \hline \vdots \\ \hline Y_{I1}\\ \vdots \\ Y_{IJ_I}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\underline{\beta}=\begin{bmatrix}\mu\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_I\end{bmatrix},\ \underline{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \vdots\\ \varepsilon_{1J_1}\\ \hline \varepsilon_{21}\\ \vdots\\ \varepsilon_{2J_2}\\ \hline \vdots\\ \hline \varepsilon_{I1}\\ \vdots\\ \varepsilon_{IJ_I}\end{bmatrix}.$$

أبعاد المصفوفة X هي $n\times(I+1)$ ورتبتها تساوي $k=I$. إن عدد معالم النموذج يساوي $p=I+1$ كما أن $n=\sum_{i=1}^{I}J_i$. إن المعادلات الناظمية هي :

$$\begin{aligned}
n\hat{\mu} + J_1\hat{\alpha}_1 + J_2\hat{\alpha}_2 + \cdots + J_I\hat{\alpha}_I &= y_{\bullet\bullet}\\
J_1\hat{\mu} + J_1\hat{\alpha}_1 &= y_{1\bullet}\\
J_2\hat{\mu} + J_2\hat{\alpha}_2 &= y_{2\bullet}\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
J_I\hat{\mu} + J_I\hat{\alpha}_I &= y_{I\bullet}
\end{aligned}$$

كتابتها بالصورة المختصرة التالية :

$$\mu: \quad n\hat{\mu} \; + \sum_{i=1}^{I} J_i\hat{\alpha}_i = y_{\bullet\bullet}$$

$$\alpha_i: \quad J_i\hat{\mu} + \quad J_i\hat{\alpha}_i = y_{i\bullet} \; ; \qquad i = 1, 2,$$

عدد المعادلات هو I+1 وعدد المعالم المجهولة هو I+1. ولكن عدد خطيًا يساوي I ، وذلك لأن المعادلة الأولى هي مجموع المعادلات حل المعادلات الناظمية لن يكون وحيدًا. ولإيجاد أحد الحلول فإننا ($p-k=1$) غير قابلة للتقدير ونساويها بالصفر للحصول على حل. ة هي $\sum_{i=1}^{I} J_i\alpha_i$. وباستخدام الشرط $\sum_{i=1}^{I} J_i\hat{\alpha}_i = 0$ فإننا نحصل $\underline{\hat{\beta}}' = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}_1, \ldots$ حيث أن :

$$\hat{\mu} = y_{\bullet\bullet} / n = \overline{y}_{\bullet\bullet} ,$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{y_{i\bullet}}{J_i} - \frac{y_{\bullet\bullet}}{n} = \overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet} \; ; \; i = 1, 2, ..., I$$

مقدر المربعات الصغرى لـ β هو :

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{I\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} .$$

أن جميع الدوال من النوع $\underline{l}'_i\underline{\beta} = (\mu+\alpha_i)$ هي دوال قابلة للتقدير وأي لابد أن تكون تركيبًا خطيًا في هذه الدوال ، ذلك لأن المتجه $\underline{l}'_i$ ينتمي السطور للمصفوفة X. إن أفضل مقدر غير منحاز (مقدر غير منحاز بانتظام) للدالة $\underline{l}'_i\underline{\beta} = (\mu+\alpha_i)$ هو :

$$\underline{l}'_i \, \underline{\hat{\beta}} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i = \overline{Y}_{i\bullet} \quad ; \; i=1, 2, \ldots, I$$

وبما أن الدال

للتقدير لأي مجموع

بد من أن يكون 0 =

تقودنا إلى التعريف ا

تعريف (٥):

(contrast) إذا ، وفق

وبعبارة أخرى يشك

ومن أمثلة الم

نظرية (٧):

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ قاب

α_i القابلة للتقدير. إ

(حيث $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$

رقم i للعامل A هو

A هو $-I^{-1}\sum_{i=1}^{I} \overline{y}_{i\bullet}$

وكما مر معن

σ^2 هو :

ولكن :

وبما أن الدالة $\sum_{i=1}^{I} c_i(\mu+\alpha_i)$ هي تركيب خطي في الدوال السابقة فهي قابلة للتقدير لأي مجموعة من الثوابت $\{c_i\}$. لذلك فإن $\mu\sum_{i=1}^{I} c_i = \sum_{i=1}^{I} c_i\alpha_i$ وبالتالي لا بد من أن يكون $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$ لكي تكون الدالة $\sum_{i=1}^{I} c_i\alpha_i$ قابلة للتقدير. وهذه الحقيقة تقودنا إلى التعريف التالي.

تعريف (٥): المتضادة Contrast: يدعى التركيب الخطي لمعالم المتجه $\underline{\beta}$ متضادة (contrast) إذا، وفقط إذا، كان مجموع معاملات التركيب الخطي يساوي الصفر. وبعبارة أخرى يشكل التركيب الخطي $\underline{l}'\underline{\beta}$ متضادة إذا، وفقط إذا، كان $\underline{l}'\underline{1}=\Sigma l=0$.

ومن أمثلة المتضادات $\sum_{i=1}^{I} c_i\alpha_i$ حيث $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$.

نظرية (٧): جميع متضادات المعالم α_i في نموذج التصميم أحادي العامل $Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$ قابلة للتقدير. كما أن المتضادات هي فقط التركيبات الخطية في المعالم α_i القابلة للتقدير. إضافة إلى ذلك فإن أفضل مقدر غير منحاز للمتضادة $\sum_{i=1}^{I} c_i\alpha_i$ (حيث $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$) هو $\sum_{i=1}^{I} c_i\bar{y}_{i\bullet}$. كما أن أفضل مقدر غير منحاز لمتوسط المستوى رقم i للعامل A هو $\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i=\bar{y}_{i\bullet}$ و أفضل مقدر غير منحاز لتأثير المستوى رقم i للعامل A هو $\hat{\alpha}_i-\hat{\bar{\alpha}}=\bar{y}_{i\bullet}-I^{-1}\sum_{i=1}^{I}\bar{y}_{i\bullet}$.

وكما مر معنا سابقًا فإن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للمعلمة σ^2 هو:

$$\hat{\sigma}^2=(n-k)^{-1}\,(\underline{Y}'\underline{Y}-\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y})$$

ولكن:

$$\underline{Y}'\underline{Y}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}Y_{ij}^2\,,\;\; X'\underline{Y}=\begin{bmatrix}Y_{\bullet\bullet}\\ Y_{1\bullet}\\ \vdots\\ Y_{I\bullet}\end{bmatrix},$$

$$\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y} = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}_1, \cdots + \hat{\alpha}_I) \begin{bmatrix} Y_{\bullet\bullet} \\ Y_{1\bullet} \\ \vdots \\ Y_{I\bullet} \end{bmatrix} = \left[\bar{Y}_{\bullet\bullet}, \bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}, \ \cdots, \bar{Y}_{I\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}\right] \begin{bmatrix} Y_{\bullet\bullet} \\ Y_{1\bullet} \\ \vdots \\ Y_{I\bullet} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}$$

$$\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

وعليه فإن المقدر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام للتباين σ^2 هو:

$$\hat{\sigma}^2 = (n-k)^{-1} (\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y})$$

$$= (n-I)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i} \right) = (n-I)^{-1} \ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

وهذه النتيجة نسردها في النظرية التالية.

نظرية (٨): إن المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للمعلمة σ^2 لنموذج التصميم أحادي العامل المعطى في التعريف (٤) هو:

$$\hat{\sigma}^2 = (n-I)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i} \right) = (n-I)^{-1} \ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

(٦ , ٧) اختبار الفرضيات لنموذج التصميم أحادي العامل

من الفرضيات التي نهتم باختبارها عادة حول نموذج التصميم أحادي العامل هي الفرضية القائلة بأن تأثيرات جميع مستويات العامل A متساوية. وهذا يعني عدم وجود فروق بين مستويات العامل. أو بعبارة أخرى إن العامل ليس له تأثير على متغير الاستجابة. ويمكن صياغة هذه الفرضية على الشكل التالي:

$$H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ \ldots = \alpha_I$$

وتختبر فرضية العدم السابقة مقابل الفرضية البديلة القائلة بأن ليست جميع تأثيرات مستويات العامل A متساوية (على الأقل واحدة مختلفة). وهذا يعني وجود

فروق بين مستويات العامل أو بعبارة أخرى فإن العامل له تأثير على متغير الاستجابة. ويمكن صياغة هذه الفرضية البديلة على الشكل التالي:

$H_1: \alpha_i \neq \alpha_j$ (لقيمتين i و j على الأقل)

ولاختبار الفرضية H_o مقابل الفرضية H_1 فإننا سنستخدم إحصاءة الاختبار المعطاة بالعلاقة (٨ , ٧) وهي في هذه الحالة:

$$W = \frac{(\hat{\sigma}_R^2 - \hat{\sigma}_F^2)/(I-1)}{\hat{\sigma}_F^2/(n-I)} = \left(\frac{\hat{\sigma}_R^2 - \hat{\sigma}_F^2}{\hat{\sigma}_F^2}\right)\left(\frac{n-I}{I-1}\right)$$

حيث $\hat{\sigma}_F^2$ هو مقدر الإمكانية العظمى للتباين σ^2 للنموذج التام $\underline{Y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ ويساوي:

$$\hat{\sigma}_F^2 = (1/n)\,(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}) = (1/n)\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right]$$

$$= (1/n)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

وللحصول على $\hat{\sigma}_R^2$ وهو مقدر الإمكانية العظمى للتباين σ^2 للنموذج المخفض $\underline{Y}=B\underline{\gamma}+\underline{\varepsilon}$ تحت الفرضية $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I$ فإننا نجعل $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = \alpha$ في النموذج الكامل لنحصل على النموذج المخفض التالي:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha + \varepsilon_{ij} = \mu_o + \varepsilon_{ij};\quad i = 1, 2, \ldots, I \quad ; j = 1, 2, \ldots, J_i$$

حيث تتوزع المتغيرات ε_{ij} بصورة مستقلة وفق التوزيع الطبيعي نفسه $N(0,\sigma^2)$.

وهذا النموذج يمكن أن يكتب على الصورة $\underline{Y}=B\underline{\gamma}+\underline{\varepsilon}$ حيث:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},\ \underline{\gamma} = [\mu_o].$$

وفضاء المعالم للنموذج المخفض هو:

$$\omega = \{(\sigma^2, \mu_o): \sigma^2 > 0, -\infty < \mu_o < \infty\}$$

هناك معلمة مجهولة واحدة لهذا النموذج لذلك فإن p=1. والمعادلة الناظمية هي:

$$\mu_o: \quad n\tilde{\mu}_o = y_{\bullet\bullet}$$

وحل هذه المعادلة هو $\tilde{\mu}_o = \bar{y}_{\bullet\bullet}$. وعليه فإن:

$$\underline{\hat{\gamma}}' \mathrm{B}'\underline{\mathrm{Y}} = \bar{y}_{\bullet\bullet}\, y_{\bullet\bullet} = \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = (1/n)\,(\underline{\mathrm{Y}}'\underline{\mathrm{Y}} - \underline{\hat{\gamma}}'\mathrm{B}'\underline{\mathrm{Y}}) = (1/n)\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}\right]$$

$$= (1/n)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2$$

وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار W كما يلي:

$$W = \left(\frac{\hat{\sigma}_R^2 - \hat{\sigma}_F^2}{\hat{\sigma}_F^2}\right)\left(\frac{n-I}{I-1}\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right)\right]}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right)}\left(\frac{n-I}{I-1}\right)$$

$$= \frac{\left[\sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i} - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}\right]}{\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right)}\left(\frac{n-I}{I-1}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2/(I-1)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2/(n-I)}$$

عندما تكون فرضية العدم $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I$ صحيحة تتوزع الإحصاءة W وفق توزيع F (لأن معلمة اللامركزية λ=0 تحت H_o) بدرجات الحرية I-1 و n-I. أي أن:

$$W \sim F(I-1\,,\, n-I)$$

وعليه فإننا نرفض $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I$ عند مستوى الدلالة α إذا كانت قيمة الإحصاءة W المحسوبة تحقق :

$$w \geq F_{\alpha;\, I-1,\, n-I}$$

وقد جرت العادة بأن توضع نتائج اختبار الفرضيات السابقة في جدول يسمى جدول تحليل التباين (التحاين) كما يلي :

جدول التحاين لاختبار $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I$ للنموذج الأحادي العامل

مصدر التغير Source	درجات الحرية d.f.	مجموع المربعات S.S.	متوسط المربعات M.S.	توقع متوسط المربعات E.M.S.	النسبة F
العامل A	$I-1$	$A_{SS} = \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i} - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}$	$A_{MS} = \frac{A_{SS}}{I-1}$	$E(A_{MS})$	$F = \frac{A_{MS}}{E_{MS}}$
الخطأ	$n-I$	$E_{SS} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}$	$E_{MS} = \frac{E_{SS}}{n-I}$	$E(E_{MS})$	
المجموع (المعدل)	$n-1$	$T_{SS} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{n}$			

ونلاحظ الجدول السابق أن :

$$E_{MS} = \frac{E_{SS}}{n-I} = \hat{\sigma}^2 = (n-I)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right)$$

$$= (n-I)^{-1} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2$$

كما يمكن إثبات ما يلي بالنسبة لتوقع متوسط المربعات :

$$E(A_{MS}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(\alpha_i - \overline{\alpha}_{\bullet}^{*})^2}{I-1}; \quad \overline{\alpha}_{\bullet}^{*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{I}J_i\alpha_i .$$

$$E(E_{MS}) = \sigma^2 .$$

لذلك فإن $E(A_{MS}) = E(E_{MS})$ إذا، وفقط إذا كانت الفرضية $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I$ صحيحة. وبناءً على هذه الحقيقة تتم مقارنة الكمية A_{MS} بالكمية E_{MS} من خلال النسبة F لرفض أو عدم رفض الفرضية H_o.

(٧ , ٧) فترات الثقة لنموذج التصميم أحادي العامل

نهتم عادة بإيجاد فترات ثقة لمعالم النموذج المجهولة أو لدوال في معالم النموذج التي تكون ذات معنى بالنسبة لنا مثل $\mu+\alpha_i$ (متوسط المستوى رقم i للعامل A) أو بعض المتضادات في المعالم α_i القابلة للتقدير وهي $\sum_{i=1}^{I} c_i\alpha_i$ حيث $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$.

نتيجة (٢):

١ – إن فترة الثقة بمعامل الثقة $(1-\alpha)$ للمقدار $\mu+\alpha_i$ في نموذج التصميم أحادي العامل هي :

$$(\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i) \pm t_{\alpha/2;\, n-I} \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i)}$$

أو

$$\overline{y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2;\, n-I} \sqrt{\frac{E_{MS}}{J_i}}$$

٢- إن فترة الثقة بمعامل الثقة $(1-\alpha)$ للمتضادة $\sum_{i=1}^{I} c_i \alpha_i$ حيث $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$ في نموذج التصميم أحادي العامل هي:

$$\sum_{i=1}^{I} c_i \hat{\alpha}_i \pm t_{\alpha/2;\, n-I} \sqrt{\hat{var}\left(\sum_{i=1}^{I} c_i \hat{\alpha}_i\right)}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{I} c_i \bar{y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2;\, n-I} \sqrt{E_{MS} \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}}$$

مثال (٤): البيانات أدناه خاصة بإحدى الدراسات. (البيانات من مثال ص ٥١٨ من كتاب Graybill ١٩٧٦)

	مستوى العامل A				
	1	2	3	4	5
Y_{ij}	Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}	Y_{5j}
	19.33	19.51	17.50	17.67	19.95
	18.41	19.37	18.79	13.83	16.25
	20.71	16.45	19.81	15.35	16.11
	19.73	18.83	18.36	18.62	20.69
	21.67	19.46		19.34	15.22
	20.38	16.98		14.96	16.54
		16.16		17.54	17.49
		17.59		14.37	15.04
				15.77	18.28
				16.49	18.74
				15.51	
				18.18	
$y_{i\bullet}$	120.23	144.35	74.46	197.63	174.31
J_i	6	8	4	12	10
$\bar{y}_{i\bullet}$	20.04	18.04	18.62	16.47	17.43
$\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i$	20.04	18.04	18.62	16.47	17.43
$\sqrt{\frac{E_{MS}}{J_i}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{J_i}}$	0.661	0.573	0.810	0.468	0.512

بافتراض نموذج التصميم أحادي العامل المعرف في تعريف (٤) نريد إيجاد ما يلي:

(أ) جدول تحليل التباين (جدول التحاين).

(ب) إيجاد مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام لكل من:

$\sigma^2,\ \mu+\alpha_i\ ,\ \alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)/2$

(ج) اختبار الفرضية $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ \dots\ = \alpha_5$ مقابل الفرضية $H_1: \alpha_i \neq \alpha_j$ (لقيمتين i و j على الأقل) عند مستوى الدلالة $\alpha=0.05$.

(هـ) أيجاد 95% فترة ثقة لكل من: $\mu+\alpha_1$ و $\alpha_1-\alpha_2$.

الحل:

(أ) جدول تحليل التباين:

مصدر التغير Source	درجات الحرية d.f.	مجموع المربعات S.S.	متوسط المربعات M.S.	النسبة F
العامل A	4	55.7821	13.9455	$F=\dfrac{13.9455}{2.6241}=5.31$
الخطأ	35	91.8419	2.6241	
المجموع (المعدل)	39	147.624		

(ب) التقديرات المطلوبة ملخصةً في الجدول التالي:

مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري	المعلمة أو المقدار
$\hat{\sigma}^2 = E_{MS} = (n-I)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i\bullet}^2}{J_i}\right) = 2.6241$	σ^2
$\hat{\mu}+\hat{\alpha}_1 = \overline{y}_{1\bullet} = 20.04$	$\mu+\alpha_1$
$\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2 = \overline{y}_{1\bullet}-\overline{y}_{2\bullet} = 20.04 - 18.04 = 2.00$	$\alpha_1-\alpha_2$
$\hat{\alpha}_1-(\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_3)/2 = \overline{y}_{1\bullet}-(\overline{y}_{2\bullet}+\overline{y}_{3\bullet})/2 = 1.71$	$\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)/2$

(ج) إن قيمة إحصاء اختبار الفرضية $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_5$ مقابل الفرضية $H_1:$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ (لقيمتين i و j على الأقل) هي :

$$W=\left(\frac{\hat{\sigma}_R^2-\hat{\sigma}_F^2}{\hat{\sigma}_F^2}\right)\left(\frac{n-I}{I-1}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2/(I-1)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2/(n-I)}=\frac{A_{MS}}{E_{MS}}=5.31$$

ولكن $F_{0.05;\,4,35}=2.64$. وبما أن $w \geq F_{0.05;\,4,35}$ فإننا نرفض $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_5$ عند مستوى الدلالة $\alpha=0.05$.

(٨ , ٧) تمارين

١- في نظرية (١)، أثبت أن $\underline{\hat{\beta}}$ المعطى بالعلاقة (٢ , ٧) هو حل للمعادلات الناظمية المعطاة في الصيغة (١ , ٧).

٢- أثبت النظرية (٢).

٣- أثبت أن معامل اللامركزية $\lambda=0$ تحت الفرضية $H_O: H\underline{\beta} = \underline{0}$.

٤- أثبت النظرية (٤).

٥- أثبت النتيجة (١).

٦- في المثال (٢) أثبت أن $\underline{\beta}^{*\prime}=\left(\overline{Y}_{1\bullet},\, 0,\, \overline{Y}_{2\bullet}-\overline{Y}_{1\bullet}\right)$ هو حل للمعادلات الناظمية.

٧- في المثال (٢) أوجد المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري بانتظام للدالة $\tau_1-\tau_2$ وذلك باستخدام المقدر $\underline{\beta}^{*\prime}$ في تمرين (٦).

٨- في المثال (٢) أوجد $\underline{\tilde{\beta}}'X'\underline{Y}$ وأثبت أنه يساوي $\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{Y}$ حيث أن $\underline{\hat{\beta}}'=\left(0,\, \overline{Y}_{1\bullet},\, \overline{Y}_{2\bullet}\right)$ و $\underline{\tilde{\beta}}'=\left(\overline{Y}_{1\bullet},\, 0,\, \overline{Y}_{2\bullet}-\overline{Y}_{1\bullet}\right)$ هما حلان للمعادلات الناظمية.

٩- أثبت أن $E(A_{MS})=\sigma^2+\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(\alpha_i-\bar{\alpha}_{\bullet}^{*})^2}{I-1}$ لنموذج التصميم أحادي العامل.

١٠- أثبت أن $E(E_{MS})=\sigma^2$ لنموذج التصميم أحادي العامل.

١١- البيانات في الجدول التالي مستخلصة من نموذج تصميم أحادي العامل:

مستوى العامل A		
1	2	3
28	34	31
26	29	25
31	25	27
27	31	29
35	29	28

(أ) أكتب نموذج التصميم أحادي العامل لهذه البيانات.

(ب) أوجد جدول التحاين ثم اختبر الفرضية $H_o: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ مقابل الفرضية $H_1: \alpha_i \neq \alpha_j$ (لقيمتين i و j على الأقل). استخدم مستوى الدلالة $\alpha=0.05$.

(ج) أوجد المقدرات غير المنحازة ذات التباين الأصغري بانتظام لمتوسطات مستويات العامل $\mu+\alpha_i$.

(د) أوجد فترات الثقة بمعامل الثقة 95% لمتوسطات مستويات العامل $\mu+\alpha_i$.

(هـ) أوجد المقدر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام لكل من:

$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3\ ,\ \alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)/2$.

(و) أوجد فترات الثقة بمعامل الثقة 95% لكل من:

$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3\ ,\ \alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)/2$

١٢- البيانات في الجدول التالي مستخلصة من نموذج تصميم أحادي العامل:

مستوى العامل A			
1	2	3	4
13.7	14.0	14.0	17.4
10.2	17.0	10.3	18.6
10.7	13.2	17.0	20.9
8.1	14.1	15.7	17.9
13.1	15.7	14.5	14.5
12.5	16.0	12.7	16.8
12.4	16.2	15.0	19.9
13.7	18.0	14.1	16.7
11.0	14.5	12.7	
11.7		14.1	

(أ) أكتب نموذج التصميم أحادي العامل لهذه البيانات.

(ب) أوجد جدول التحاين ثم اختبر الفرضية $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ مقابل الفرضية $H_1: \alpha_i \neq \alpha_j$ (لقيمتين i و j على الأقل). استخدم مستوى الدلالة $\alpha=0.05$.

(ج) أوجد المقدرات غير المنحازة ذات التباين الأصغري بانتظام لمتوسطات مستويات العامل $\mu+\alpha_i$.

(د) أوجد 95% فترات ثقة لمتوسطات مستويات العامل $\mu+\alpha_i$.

(هـ) أوجد المقدر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام لكل من:

$$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3\ ,(\alpha_3+\alpha_4)/2-(\alpha_1+\alpha_2)/2 .$$

(و) أوجد 95% فترات ثقة لكل من:

$$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3\ ,(\alpha_3+\alpha_4)/2-(\alpha_1+\alpha_2)/2 .$$

المراجع

Box, G. E. P.; W. G. Hunter; and J. S. Hunter. *Statistics for Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

Bowerman, B. L., R. T. O'Connell, and D. A. Dickey. *Linear Statistical Models: An Applied Approach*. Boston: Duxbury Press, 1986.

Brook, R. J., and G. C. Arnold. *Applied Regression Analysis and Experimental Design*. New York: Marcel Dekker, 1985.

Cochran, W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

Draper, N., and Smith, H. *Applied Regression Analysis*. New York: Wiley, 1966.

Dunn, O. J., and V. A. Clark. *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Edwards, A. L. *Multiple Regression and the Analysis of Variance and Covariance*, 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1985.

Fisher, R. A. *The Design of Experiments*. 8th ed. New York: Hafner Publishing Co., 1966.

Graybill, F. A. *Matrices with Applications in Statistics*. 2nd Edition. Belmont, Calif.: Wadsworth, 1983.

Graybill, F. A. *Theory and Application of the Linear Model*. Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, California, 1976.

Hocking, R. R. *The Analysis of Linear Models*. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1985.

John, P. W. M. *Statistical Design and Analysis of Experiments*. New York: Macmillan Co., 1971.

Lehmann, E. L. *Testing Statistical Hypotheses*. New York: Wiley, 1959.

Mendenhall, W. *Introduction to Linear Models and the Design and Analysis of Experiments*. Boston: Duxbury Press, 1968.

Montgomery, D. C. *Design and Analysis of Experiments*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1983.

Montgomery, D. C., and E. A. Peek. *Introduction to Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1982.

Myers, R. H., and Milton, J. S. *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. PWS-Kent, Boston, 1991.

Peterson, R. G. *Design and Analysis of Experiments*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.

Rao, C. R. *Linear Statistical Inference and its Applications*. New York: Wiley, 1973.

Searle, S. R. *Linear Models*. New York: Wiley, 1971.

Searle, S. R. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York: Wiley, 1982.

Seber, G. A. *Linear Regression Analysis*. New York: Wiley, 1977.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

أثر	Trace
أثر مصفوفة	Trace of a matrix
إحصاءة	Statistic
إحصاءة اختبار	Test statistic
اختبار	Test
اختبار إف	F-test
اختبار الإمكانية العظمى المعمم	Generalized likelihood ratio test
اختبار فرضيات	Hypotheses testing
ارتباط	Correlation
ارتباط خطي	Linear correlation
استقلال	Independence
إسقاط	Projection
اعتماد	Dependence
أفضل مقدر خطي غير منحاز	Best linear unbiased estimator

أمثل	Optimal
انحدار	Regression

ت

تأثير	Effect
تأثير رئيس	Main effect
تباين	Variance
تباين أصغري	Minimum variance
تحليل تباين	Analysis of variance
تحويل	Transformation
تركيب خطي	Linear combination
تصميم	Design
تصميم تجارب	Design of experiment
تصميم تجريبي	Experimental Design
تقدير	Estimation
تقدير المربعات الصغرى (الدنيا)	Least square estimate
تقدير بفترة	Interval estimation
تقدير نقطي	Point estimator
توزيع	Distribution
توزيع إف	F-distribution
توزيع إف اللامركزي	Noncentral F-distribution
توزيع تي	t-distribution
توزيع تي اللامركزي	Noncentral t-distribution

Conditional distribution	توزيع شرطي
Noncentral chi-square distribution	توزيع كاي مربع اللامركزي
Joint distribution	توزيع مشترك
Sampling distribution	توزيع معاينة
Marginal distribution	توزيع هامشي
Expectation	توقع
Expectation of mean squares	توقع متوسط المربعات

ج

ANOVA table	جدول تحليل التباين (جدول تحاين)
Latent roots	جذور كامنة
Characteristic roots	جذور مميزة

خ

Error	خطأ
Experimental error	خطأ تجريبي
Linear	خطي

د

Likelihood function	دالة إمكانية
Power function	دالة قوة
Density function	دالة كثافة
Estimable function	دالة قابلة للتقدير
Characteristic function	دالة مميزة
Moment generating function	دالة مولدة للعزوم

درجات حرية	Degrees of freedom
ر	
رتبة مصفوفة	Rank of a matrix
رواسب	Residuals
س	
سطر	Row
ص	
صيغة تربيعية	Quadratic form
ط	
طرائق حسابية	Computing techniques
ع	
عامل	Factor
عزم	Moment
عشوائي	Random
عشوائية (تعشية)	Randomization
عمود	Column
عينة	Sample
غ	
غير مركزي	Noncentral
غير مستقل (معتمد) خطيا	Linearly dependent
غير منحاز	Unbiased
ف	

Simultaneous confidence intervals	فترات ثقة متزامنة
Prediction interval	فترة تنبؤ
Confidence interval	فترة ثقة
Hypothesis	فرضية
Null hypothesis	فرضية العدم
Space	فضاء

ق

Test Power	قوة الاختبار

م

Homogenous	متجانس
Vector	متجه
Latent vector	متجه كامن
Characteristic vector	متجه مميز
Consistent	متسق
Contrast	متضادة
Orthogonal	متعامد
Response variable	متغير استجابة
Dependent variable	متغير تابع
Predictor variable	متغير تنبؤ
Independent variable	متغير مستقل
Mean	متوسط
Factor level mean	متوسط مستوى عامل

Sum of squares	مجموع مربعات
Total sum of squares	مجموع مربعات كلي
Negative definite	محدد سالب
Positive definite	محدد موجب
Determinant	محددة
Determinant of a matrix	محددة مصفوفة
Chi-square	مربع كاي
correlated	مرتبط
Independent	مستقل
Linearly independent	مستقل خطيا
Confidence level	مستوى ثقة
Factor level	مستوى عامل
Source of variation	مصدر التغير
Matrix	مصفوفة
Projection matrix	مصفوفة إسقاط
Covariance matrix	مصفوفة تغاير
Variance matrix	مصفوفة تباين
Design matrix	مصفوفة تصميم
Singular matrix	مصفوفة شاذة
Idempotent matrix	مصفوفة متساوية القوى
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة

مصفوفة متناظرة (متماثلة)	Symmetric matrix
مصفوفة مثلثة	Triangular matrix
مصفوفة محايدة (الوحدة)	Identity matrix
معادلات خطية	Linear equations
معادلات متجانسة	Homogenous equations
معادلات ناظمية	Normal equations
معامل ثقة	Confidence coefficient
معاملات الانحدار	Regression coefficients
معاينة	Sampling
معتمد	Dependent
معكوس	Inverse
معكوس شرطي	Conditional inverse
معكوس مصفوفة	Inverse of a matrix
معلمة	Parameter
معلمة اللامركزية	Noncentrality parameter
مقارنة	Comparison
مقدر المربعات الصغرى (الدنيا)	Least square estimator
مقدر أمثل	Optimal estimator
مقدر غير منحاز	Unbiased estimator
مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام	Uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE)

منقول	Transpose
منقول مصفوفة	Transpose of a matrix
موجبة نصف محددة	Semi-positive definite

ن

نموذج	Model
نموذج تصميم أحادي العامل	One-factor design model
نموذج انحدار	Regression model
نموذج تام	Full model
نموذج تصميم	Design model
نموذج خطي	Linear model
نموذج غير مقيد	Unrestricted model
نموذج متوسطات الخلايا	Cell means model
نموذج مخفض	Reduced model
نموذج مركبات التباين	Variance-component model
نموذج مقيد (مخفض)	Restricted model

ثانيًا: إنجليزي – عربي

A

Analysis of variance	تحليل تباين
ANOVA table	جدول تحليل التباين (جدول تحاين)

B

Best linear unbiased estimator	أفضل مقدر خطي غير منحاز

C

Cell means model	نموذج متوسطات الخلايا
Characteristic function	دالة مميزة
Characteristic roots	جذور مميزة
Characteristic vector	متجه مميز
Chi-square	مربع كاي
Column	عمود
Comparison	مقارنة
Computing techniques	طرائق حسابية
Conditional distribution	توزيع شرطي
Conditional inverse	معكوس شرطي
Confidence coefficient	معامل ثقة
Confidence interval	فترة ثقة
Confidence level	مستوى ثقة
Consistent	متسق
Contrast	متضادة
Correlated	مرتبط

Correlation	ارتباط
Covariance matrix	مصفوفة تغاير

D

Degrees of freedom	درجات حرية
Density function	دالة كثافة
Dependence	اعتماد
Dependent	معتمد
Dependent variable	متغير تابع
Design	تصميم
Design matrix	مصفوفة تصميم
Design model	نموذج تصميم
Design of experiment	تصميم تجارب
Determinant	محددة
Determinant of a matrix	محددة مصفوفة
Distribution	توزيع

E

Effect	تأثير
Error	خطأ
Estimable function	دالة قابلة للتقدير
Estimation	تقدير
Expectation	توقع
Expectation of mean squares	توقع متوسط المربعات

Experimental Design	تصميم تجريبي
Experimental error	خطأ تجريبي

F

Factor	عامل
Factor level	مستوى عامل
Factor level mean	متوسط مستوى عامل
F-distribution	توزيع إف
F-test	اختبار إف
Full model	نموذج تام

G

Generalized likelihood ratio test	اختبار الإمكانية العظمى المعمم

H

Homogenous	متجانس
Homogenous equations	معادلات متجانسة
Hypotheses testing	اختبار فرضيات
Hypothesis	فرضية

I

Idempotent matrix	مصفوفة متساوية القوى
Identity matrix	مصفوفة محايدة (الوحدة)
Independence	استقلال
Independent	مستقل
Independent variable	متغير مستقل
Interval estimation	تقدير بفترة

Inverse	معكوس
Inverse of a matrix	معكوس مصفوفة
J	
Joint distribution	توزيع مشترك
L	
Latent roots	جذور كامنة
Latent vector	متجه كامن
Least square estimate	تقدير المربعات الصغرى (الدنيا)
Least square estimator	مقدر المربعات الصغرى (الدنيا)
Likelihood function	دالة الإمكانية
Linear	خطي
Linear combination	تركيب خطي
Linear correlation	ارتباط خطي
Linear equations	معادلات خطية
Linear model	نموذج خطي
Linearly dependent	غير مستقل (معتمد) خطيا
Linearly independent	مستقل خطيا
M	
Main effect	تأثير رئيس
Marginal distribution	توزيع هامشي
Matrix	مصفوفة
Mean	متوسط

Minimum variance	تباين أصغري
Model	نموذج
Moment	عزم
Moments generating function	دالة مولدة للعزوم

N

Negative definite	محدد سالب
Noncentral	غير مركزي
Noncentral chi-square distribution	توزيع كاي مربع اللامركزي
Noncentral F-distribution	توزيع إف اللامركزي
Noncentral t-distribution	توزيع تي اللامركزي
Noncentrality parameter	معلمة اللامركزية
Normal equations	معادلات ناظمية
Null hypothesis	فرضية العدم

O

One-factor design model	نموذج تصميم أحادي العامل
Optimal	أمثل
Optimal estimator	مقدر أمثل
Orthogonal	متعامد
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة

P

Parameter	معلمة
Point estimation	تقدير نقطي

Positive definite	محدد موجب
Power function	دالة القوة
Prediction interval	فترة تنبؤ
Predictor variable	متغير تنبؤ
Projection	إسقاط
Projection matrix	مصفوفة إسقاط

Q

Quadratic form	صيغة تربيعية

R

Random	عشوائي
Randomization	عشوائية (تعشية)
Rank of a matrix	رتبة مصفوفة
Reduced model	نموذج مخفض
Regression	انحدار
Regression coefficients	معاملات الانحدار
Regression model	نموذج انحدار
Residuals	رواسب
Response variable	متغير استجابة
Restricted model	نموذج مقيد (مخفض)
Row	سطر

S

Sample	عينة
Sampling	معاينة

Sampling distribution	توزيع معاينة
Semi-positive definite	موجبة نصف محددة
Simultaneous confidence intervals	فترات ثقة متزامنة
Singular matrix	مصفوفة شاذة
Source of variation	مصدر التغير
Space	فضاء
Statistic	إحصاءة
Sum of squares	مجموع مربعات
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة (متماثلة)

T

t-distribution	توزيع تي
Test	اختبار
Test Power	قوة الاختبار
Test statistic	إحصاءة اختبار
Total sum of squares	مجموع مربعات كلي
Trace	أثر
Trace of a matrix	أثر مصفوفة
Transformation	تحويل
Transpose	منقول
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Triangular matrix	مصفوفة مثلثة

U

Unbiased	غير منحاز
Unbiased estimator	مقدر غير منحاز
Uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE)	مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام
Unrestricted model	نموذج غير مقيد

V

Variance	تباين
Variance matrix	مصفوفة تباين
Variance-component model	نموذج مركبات التباين
Vector	متجه

كشاف الموضوعات

أ

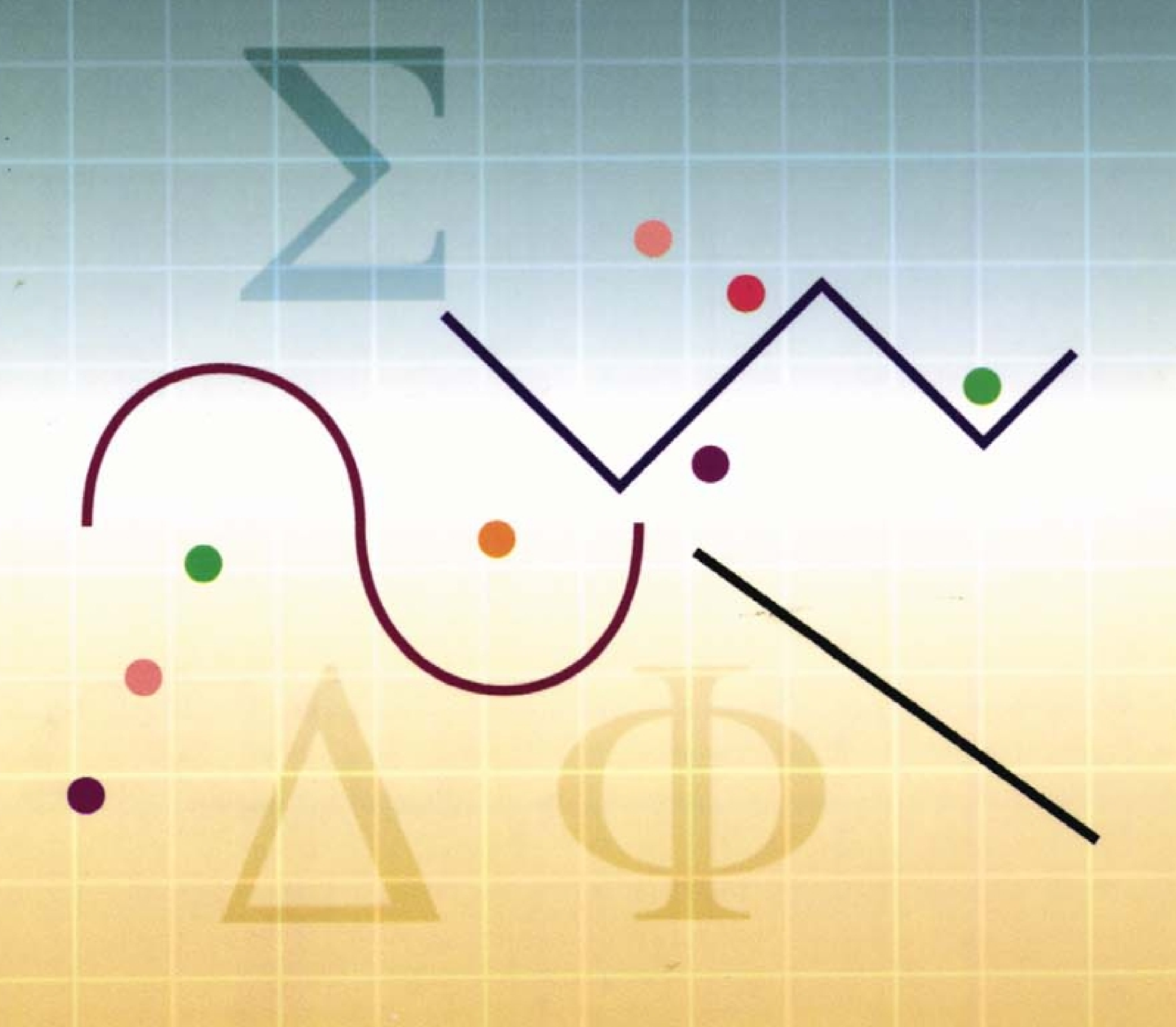
نبذ عن المؤلفين

أنيس إسماعيل كنجو

- ولد عام ١٣٥٥هـ/١٩٣٥م.
- حصل على ليسانس في الرياضيات عام ١٩٥٧م من جامعة دمشق.
- حصل على الماجستير في الإحصاء عام ١٩٦٣م من معهد فرجينيا بوليتيكنيك- أمريكا
- حصل على دكتوراة الفلسفة في الإحصاء عام ١٩٦٥م من معهد فرجينيا بوليتيكنيك- أمريكا
- عمل في قسم الإحصاء وبحوث العمليات في جامعة الملك سعود برتبة أستاذ من عام ١٤٠٣هـ حتى عام ١٤٢٣هـ.
- قام بتأليف العديد من الأبحاث العلمية المنشورة في مجلات علمية محكمة.
- قام بتأليف وترجمة ما يزيد عن عشرين كتابًا متخصصًا.
- عضو جمعية الشرف القومية الأمريكية للرياضيات.

عبدالله بن عبدالكريم الشيحة

- ولد عام ١٣٨٢هـ/١٩٦٣م.
- حصل على بكالوريوس العلوم في الإحصاء عام ١٤٠٧هـ من جامعة الملك سعود.
- حصل على ماجستير العلوم في الإحصاء عام ١٤١١هـ من جامعة ولاية أيوا- أمريكا.
- حصل على دكتوراة الفلسفة في الإحصاء عام ١٤١٥هـ من جامعة ولاية كانساس- أمريكا.
- يعمل حاليًا في قسم الإحصاء وبحوث العمليات في جامعة الملك سعود برتبة أستاذ مشارك.
- عمل رئيسًا لقسم الإحصاء وبحوث العمليات في جامعة الملك سعود في الفترة ١٤٢٣-١٤٢٥هـ.
- قام بنشر العديد من الأبحاث العلمية في مجلات علمية محكمة وفي مؤتمرات علمية دولية ومحلية.
- عضو الجمعية العالمية للحسابات الإحصائية. عضو الجمعية السعودية للعلوم الرياضية.



ردمك :٥-٨٥٣-٣٧-٩٩٦٠
ISBN: 9960-37-853-5